BỘ GIAO THÔNG VẬN TẢI
TRƯỜNG ĐH GTVT TP HCM
KHOA CƠ KHÍ

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập – Tự do – Hạnh phúc
-----o0o-----

DAO ĐỘNG KĨ THUẬT

(Dành cho sinh viên các khối cơ khí)

Người lập: **GV-Kỹ sư Thái Văn Nông**
TS Nguyễn Văn Nhanh

HCM - 2012

LỜI NÓI ĐẦU

Dao động là một hiện tượng phổ biến trong tự nhiên và trong kỹ thuật. Các máy, các phương tiện giao thông vận tải, các tòa nhà cao tầng, những cây cầu... đó là các hệ dao động. Dao động là một quá trình trong đó một đại lượng vật lý (hóa học, sinh học...) thay đổi theo thời gian mà có một đặc điểm nào đó lặp lại ít nhất 1 lần.

Các đại lượng dao động có thể là các vị trí, vận tốc, gia tốc, năng lượng của vật, dòng điện, điện thế, ứng suất, âm thanh. v. v…Hiện tượng dao động xảy ra và cũng được nghiên cứu để ứng dụng (nếu có lợi) hoặc hạn chế (nếu có hại) trong rất nhiều lĩnh vực kỹ thuật khác nhau.

Môn "*Dao động kĩ thuật*" giúp cho sinh viên nắm được những kiến thức cơ bản về lý thuyết dao động, các dạng dao động tuyến tính hệ 1 bậc, 2 bậc hoặc n bậc tự do và các phương pháp tính toán, ứng dụng trong kỹ thuật.

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU 2
MỤC LỤC 3
Chương 1 - NHỮNG VẤN ĐỀ CHUNG VỀ DAO ĐỘNG 5
I. KHÁI NIỆM CHUNG 5
1. DAO ĐỘNG VÀ DAO ĐỘNG CƠ 5
2. QUY LUẬT DAO ĐỘNG 7
3. CÁC ĐẠI LƯỢNG ĐẶC TRƯNG CHO DAO ĐỘNG CƠ HỌC 10
II. CÁC CÁCH BIỂU DIỄN DAO ĐỘNG 11
III. TỔNG HỢP VÀ PHÂN TÍCH CÁC DAO ĐỘNG 13
1. DAO ĐỘNG CÙNG PHA 13
2. CÁC DAO ĐỘNG CÙNG TẦN SỐ 14
3. CÁC DAO ĐỘNG KHÁC PHA 16
IV. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 1 19
Chương 2- DAO ĐỘNG CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO 22
I. MÔ HÌNH VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO 22
1. MÔ HÌNH 22
2. CÁC YẾU TỐ CẤU THÀNH MÔ HÌNH 23
3. PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG 32
II. DAO ĐỘNG TỰ DO KHÔNG CÓ LỰC CẢN 35
1. MÔ HÌNH 35
2. PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG 35
3. DẠNG DAO ĐỘNG VÀ CÁC THÔNG SỐ DAO ĐỘNG 36
III. DAO ĐỘNG TỰ DO CÓ LỰC CẢN CỦA HỆ 1 BẬC TỰ DO 41
1. TRƯỜNG HỢP TRONG HỆ CÓ SỨC CẢN MA SÁT KHÔ 41
2. TRƯỜNG HỢP TRONG HỆ CÓ SỨC CẢN NHỚT 45
IV. ẢNH HƯỞNG CỦA LỰC CẢN ĐẾN BIÊN ĐỘ VÀ TẦN SỐ DAO ĐỘNG TỰ DO 49
1. ẢNH HƯỞNG CỦA LỰC CẢN ĐẾN BIÊN ĐỘ DAO ĐỘNG 49
2. ẢNH HƯỞNG CỦA LỰC CẢN ĐẾN TẦN SỐ DAO ĐỘNG 52
V. DAO DỘNG CƯỠNG BỨC CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO 53
1. MÔ HÌNH VÀ PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG 53
2. DẠNG VÀ CÁC THÔNG SỐ CỦA DAO ĐỘNG 54
VI. HỆ SỐ KHUYẾCH ĐẠI BIÊN ĐỘ VÀ MỘT SỐ MÔ HÌNH THƯỜNG GẶP VỀ DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO 56
1. MÔ HÌNH 1 57
2. MÔ HÌNH 2 58
3. MÔ HÌNH 3 65
4. MÔ HÌNH 4 71
VII. DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC KHI CÓ SỨC CẢN MA SÁT KHÔ 76
1. MÔ HÌNH VÀ PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG 76
2. DẠNG VÀ THÔNG SỐ CỦA DAO ĐỘNG 77
VIII. CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG II 79
Chương 3 - DAO ĐỘNG CỦA HỆ NHIỀU BẬC TỰ DO 83
I. MÔ HÌNH CỦA HỆ NHIỀU BẬC TỰ DO VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN MÔ TẢ HỆ DAO ĐỘNG 83

1. MÔ HÌNH 83
2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN MÔ TẢ HỆ DAO ĐỘNG 84
II. DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA HỆ NHIỀU BẬC TỰ DO 90
1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG TỰ DO VÀ CÁCH GIẢI 90
2. VÍ DỤ 91
III. DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC CỦA HỆ NHIỀU BẬC TỰ DO 95
1. MÔ HÌNH VÀ PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG 95
2. DẠNG VÀ CÁC THÔNG SỐ CỦA DAO ĐỘNG 96
3. CÁC BÀI TOÁN ỨNG DỤNG 100
IV. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 3 106
PHỤ LỤC 108
Bảng 1 - BẢNG THỨ NGUYÊN MỘT SỐ ĐẠI LƯỢNG 108
Bảng 2 - NHỮNG BỘI SỐ VÀ ƯỚC SỐ CỦA ĐƠN VỊ ĐO 109
TÀI LIỆU THAM KHẢO 110

Chương 1 - NHỮNG VẤN ĐỀ CHUNG VỀ DAO ĐỘNG

I. KHÁI NIỆM CHUNG

1. DAO ĐỘNG VÀ DAO ĐỘNG CƠ

a) Định nghĩa

Trong cuộc sống cũng như trong kỹ thuật, chúng ta thường gặp các đại lượng có giá trị biến đổi theo thời gian, lặp đi lặp lại xung quanh một vị trí cân bằng. Ta nói các đại lượng đó *dao động*.

Các đại lượng dao động có thể là các vị trí, vận tốc, gia tốc, năng lượng của vật, dòng điện, điện thế, ứng suất, âm thanh..v..v…Hiện tượng dao động xảy ra và củng được nghiên cứu để ứng dụng (nếu có lợi) hoặc hạn chế (nếu có hại) trong rất nhiều lĩnh vực kỹ thuật khác nhau. Nhưng ở đây do hạn chế về nội dung và thời lượng củng như mục đích của giáo trình chúng ta chỉ quan tâm nghiên cứu *dao động cơ* đó là sự *thay đổi vị trí* của các vật (biểu hiện qua các *chuyển vị*) xung quanh vị trí cân bằng.

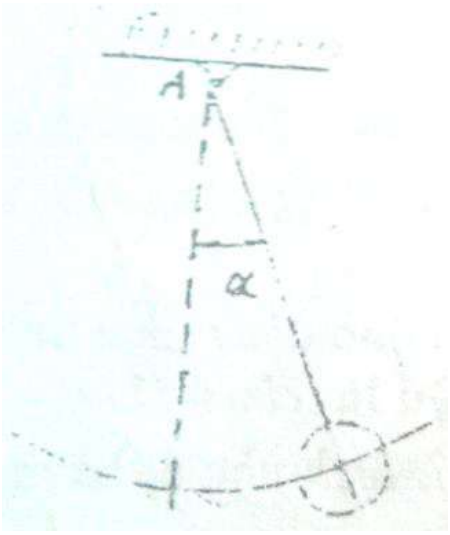
- Nếu vật dao động tịnh tiến theo các trục thì chúng có *chuyển vị đường*,
- Nếu vật lắc qua lắc lại xung quanh các trục thì chúng có *chuyển vị góc*.

Vậy, ***Dao động là một quá trình, trong đó một đại lượng vật lý thay đổi theo thời gian, mà có một đặc điểm nào đó lặp lại ít nhất một lần.***

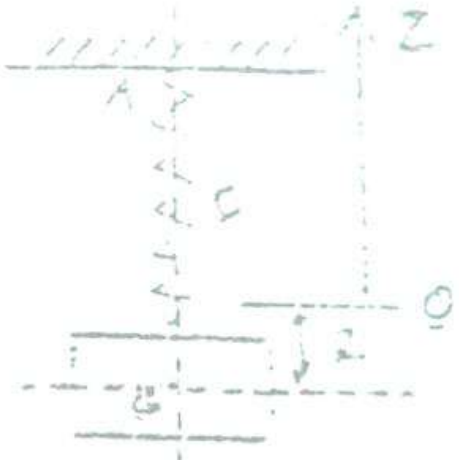
Hoặc Dao động là sự thay đổi vị trí của các vật xung quanh vị trí cân bằng.

Trong kỹ thuật, dao động vừa có hại vừa có lợi. Lợi khi dao động được sử dụng để tối ưu hóa một số kỹ thuật như: dầm, kĩ thuật rung… Hại khi dao động làm giảm độ bền của máy, gây ra hiện tượng mỏi của vật liệu, dẫn tới phá hủy, ảnh hưởng đến tuổi thọ của các công trình.

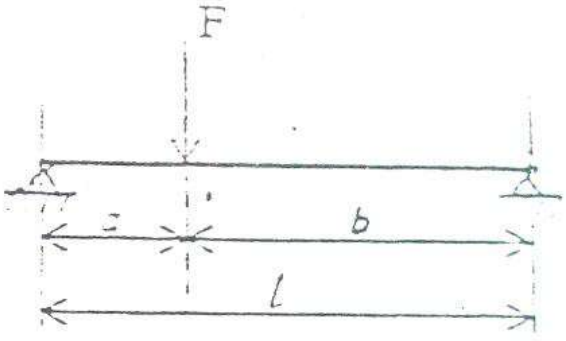
Ví dụ dao động của con lắc (hình 1-1) có chuyển vị góc xung quanh trục đi qua điểm treo A còn dao động của một vật nặng treo trên lò xo có chuyển vị đường dọc theo trục đứng Z.



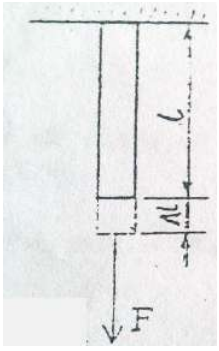
a) Dao động góc của con lắc



b) Dao động đường của vật nặng



c) Dầm chịu uốn



d) Thanh đàn hồi chịu kéo nén

Hình 1.1 – Các ví dụ về dạng dao động

b) Phân loại dao động:

** Căn cứ vào cơ cấu gây nên dao động:*

- Dao động tự do;
- Dao động cưỡng bức;
- Dao động tham số;
- Tự dao động;
- Dao động hỗn độn;
- Dao động ngẫu nhiên.

** Căn cứ vào số bậc tự do:*

- Dao động của hệ một bậc tự do;
- Dao động của hệ nhiều bậc tự do;
- Dao động của hệ vô hạn bậc tự do.

** Căn cứ vào phương trình chuyển động:*

- Dao động tuyến tính;
- Dao động phi tuyến.

** Căn cứ vào dạng chuyển động:*

- Dao động dọc;
- Dao động xoắn;
- Dao động uốn.

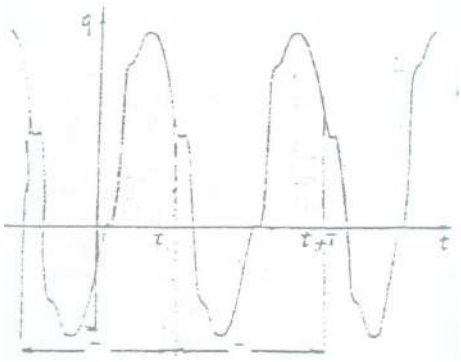
2. QUY LUẬT DAO ĐỘNG

Dao động có thể xảy ra theo nhiều quy luật khác nhau, nhưng ta thường gặp nhất là các quy luật sau đây:

a. Dao động theo quy luật tuần hoàn:

$$q(t + T) = q(t) \qquad (1\text{-}1)$$

Có nghĩa là cứ sau một thời gian T nhất định giá trị của q lại trở về trị số củ. Thời gian T nhỏ nhất (tính bằng giây) gọi là chu kỳ của dao động.



Hình 1.2: Dao dộng theo quy luật tuần hoàn

b. *Dao động họ hình sin:* là dao động xảy ra theo quy luật ;

$$q(t) = A(t)\cos\omega(t)t + B(t)\sin\omega(t)t \qquad (a) \qquad (1\text{-}2)$$

$$q(t) = q_o(t)\cos[\omega(t)t + \varphi(t)] \qquad (b)$$

trong đó:

A, B, q_o , ω, φ là những đại lượng biến đổi chậm theo thời gian.

- A là giá trị lớn nhất của q đạt được trong một chu kỳ gọi là *biên độ.*

- ω gọi là tần số vòng, nó là số dao động thực hiện được trong 2π*[s]*, ω đo bằng Hectz ký hiệu là *[Hz]=[1/s]=[s^{-1}],*

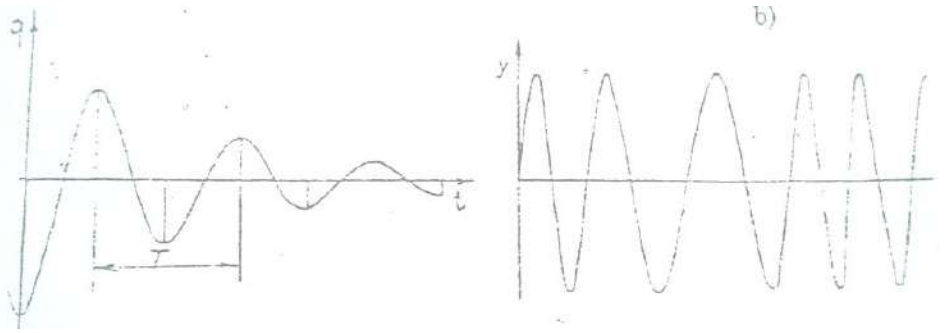
φ gọi là ***pha ban đầu*** hay ***góc lệch pha*** đo bằng *[rad]*.

Chu kỳ của dao động họ hình sin là chu kỳ của hàm số sin $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Như vậy sau một chu kỳ, do A(t), ω(t), φ(t) biến đổi đại lượng dao động họ hình sin không trở về trị số củ nữa.

Dao động họ hình sin *chỉ có biên độ biến đổi theo thời gian* gọi là dao động họ hình sin *biến biên.* Loại dao động này có nhiều ứng dụng trong kỹ thuật.

Ví dụ dao động có biên độ giảm theo hàm số $e^{j\omega t}$ gọi là dao động tắt dần xảy ra khi dập tắt các dao động bằng giảm chấn (hình 1-3), dao động có biên độ biến đổi theo hàm số sin được sử dụng nhiều trong kỷ thuật điện và vô tuyến điện.



Hình 1.3: Dao động họ hình sin

a -Dao động tắt dần (biến biên) b-Dao động tần số thay đổi (biến tần)

Dao động họ hình sin *chỉ có tần số biến đổi theo thời gian* gọi là dao động họ hình sin *biến tần.* Loại dao động này cũng được ứng dụng nhiều trong kỹ thuật điện và vô tuyến.

a. *Dao động điều hoà:* là dao động họ hình sin có A, ω, φ đều là hằng số, quy luật của nó là:

$$q(t) = A.\cos \omega t + B.\sin \omega t \qquad (a) \qquad (1\text{-}3)$$

$$= q_o .\cos(\omega t + \varphi) \qquad (b)$$

Dao động điều hoà là dao động họ hình sin nhưng cũng có các tính chất của dao động tuần hoàn vì sau một chu kỳ nó lại trở về trị số cũ.

+ ***chu kỳ*** của dao động điều hoà là $T = \frac{2\pi}{\omega}$ *[s]* (1-4)

+ số nghịch đảo của chu kỳ gọi là ***tần số***, kí hiệu là f và tính bằng hectz:

$f = \frac{1}{T}$ (1-5)

+ Như vậy ***tần số vòng*** :

$\omega = 2\pi f$ [Hz] (1-6)

Là số dao động thực hiện được trong thời gian 2π giây.

+ q_o là giá trị lớn nhất mà đại lượng q có thể đạt được trong một chu kỳ:

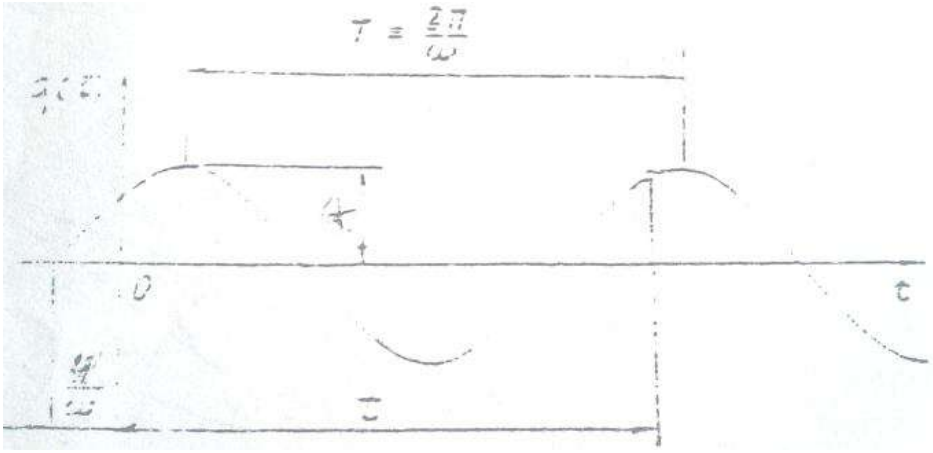
$q_o = \sqrt{A^2 + B^2}$ (1-7)

ứng với khi cos(ωt + φ) = 1 gọi là ***biên độ của dao động*** .

+ (ωt + φ) [rad] gọi là ***pha của dao động*** . (1-8)

+ φ [rad] gọi là ***pha ban đầu*** hay ***góc lệch pha***. (1-9)

Tất cả các thông số trên của dao động điều hoà đều là hằng số theo thời gian. Hình 1-4 biểu diễn quy luật dao động điều hoà (1-3) trên toạ độ q(t) ta cũng thấy được ý nghĩa của các thông số nói trên.



Hình 1.4 : Dao động điều hoà

Dao động điều hoà cũng là loại dao động được nghiên cứu nhiều nhất, bởi vì một dao động theo quy luật tuần hoàn q(t) bất kỳ có thể phân tích thành tổng của các dao động điều hoà theo công thức Fourier:

$$q(t) = A + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) \qquad (1\text{-}10)$$

Do hạn chế về nội dung và thời gian trong giáo trình này chúng ta cũng chỉ có thể đi sâu nghiên cứu các *dao động họ hình sin* và *dao động điều hoà* mà thôi.

3. CÁC ĐẠI LƯỢNG ĐẶC TRƯNG CHO DAO ĐỘNG CƠ HỌC

3.1. *Chu kỳ dao động T[s]* – là khoảng thời gian ngắn nhất để vật thực hiện được một dao động toàn phần hay là khoảng thời gian ngắn nhất để trạng thái dao động được lặp lại như cũ.

Nếu trong khoảng thời gian Δt, vật thực hiện được N dao động thì ta có chu kỳ

$$T = \frac{\Delta t}{N} \quad [\text{s}]$$

3.2. *Tần số dao động f [Hz]* là số lần dao động trong một đơn vị thời gian (tức là 1 giây). Nó là đại lượng nghịch đảo của chu kỳ dao động.

$$f = \frac{1}{T} \quad [\text{Hz}]$$

3.3. *Tần số vòng (gốc) ω [rad/s]* là số dao động mà vật thực hiện được trong thời gian 2π giây.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad [\text{rad/s}]$$

3.4. *Ly độ, vận tốc và gia tốc của vật*

- Ly độ của vật dao động: $q = q_0 \cos(\omega t + \varphi)$ [m, cm, mm…]

- Vận tốc của vật dao động : $V = q' = -q_0 \omega \sin(\omega t + \varphi)$ [m/s, cm/s, mm/s…]

- Gia tốc của vật dao động : $a = q'' = V' = -q_0 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 q$ [m/s^2, cm/s^2, mm/s^2…]

3.5. *Năng lượng trong dao động*

Định luật bảo toàn năng lượng: ***Trong quá trình dao động thì động năng và thế năng có sự biến đổi qua lại, động năng tăng thì thế năng giảm và ngược lại, nhưng tổng của chúng là cơ năng (tức năng lượng toàn phần) luôn được***

bảo toàn.

$$W = W_đ + W_t = const$$

Trong đó : W - cơ năng toàn phần;

$W_đ$ - động năng;

W_t - thế năng.

Ví dụ một vật dao động điều hòa có PTDĐ như sau $q = q_0 \cos(\omega t + \varphi)$

Động năng $W_đ = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 q_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = W \sin^2(\omega t + \varphi)$

Thế năng $W_t = \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 q_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = W \cos^2(\omega t + \varphi)$

Cộng 2 vế của 2 phương trình trên ta được:

$$W_đ + W_t = W = \frac{1}{2} m\omega^2 q_0^2 = const$$

II. CÁC CÁCH BIỂU DIỄN DAO ĐỘNG

Chúng ta có thể biểu diễn dao động *bằng phương trình đại số* như phương trình (1-3) hay *bằng đồ thị* như hình 1.2, 1. 3, 1.4 đã giới thiệu.

Qua đó tính toán được các đặc trưng cơ bản của chúng như biên độ, tần số, góc lệch pha theo các công thức nêu trên.

Ở đây chúng ta làm quen với các *phương pháp biểu diễn dao động bằng số phức* và *véctơ quay* là những phương pháp hay dùng để nghiên cứu dao động sau này.

Nếu chúng ta cộng thêm vào vế phải của phương trình biểu diễn dao động điều hoà (1-3) một lượng phức tương ứng là $j.q_o \sin(\omega t + \varphi)$, thì vế phải của nó sẽ trở thành một số phức :

$$q(t) = q_o \cos(\omega t + \varphi) + j\, q_o \sin(\omega t + \varphi) \qquad (a) \qquad (1\text{-}11)$$

$$= q_o e^{j(\omega t+\varphi)} = q_o e^{j\omega t} . e^{j\varphi}$$

Với j là đơn vị ảo : $j^2 = -1$.

Biểu diễn trên mặt phẳng số q sẽ là một véctơ có độ dài $A = q_o$ và làm với

trục thực góc (ωt +φ) (Hình 1.5), ta ký hiệu bằng chữ q có gạch ngang ở dưới $\underline{q}$.

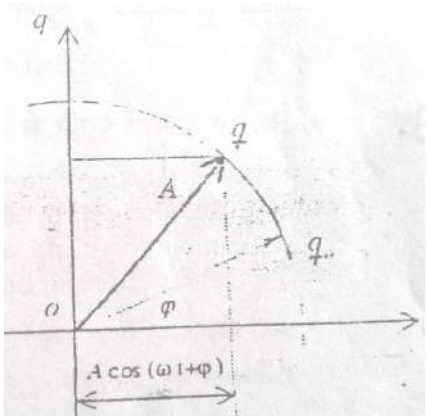
Khi cho véctơ này quay với vận tốc góc ω quanh góc toạ độ hình chiếu của nó trên trục thực sẽ biểu diễn quy luật (1-3) của dao động điều hoà :

$$q(t) = q_o \cos(\omega t + \varphi)$$

vì thế cũng có thể dùng số phức (1-11) hay véctơ quay trong hình 1.5 để biểu diễn dao động.

véctơ $\underline{q}_o = Ae^{j\varphi}$ (1-12)

biểu diễn véctơ $\underline{q}$ ở vị trí t = 0 gọi là *biên độ phức của dao động*.

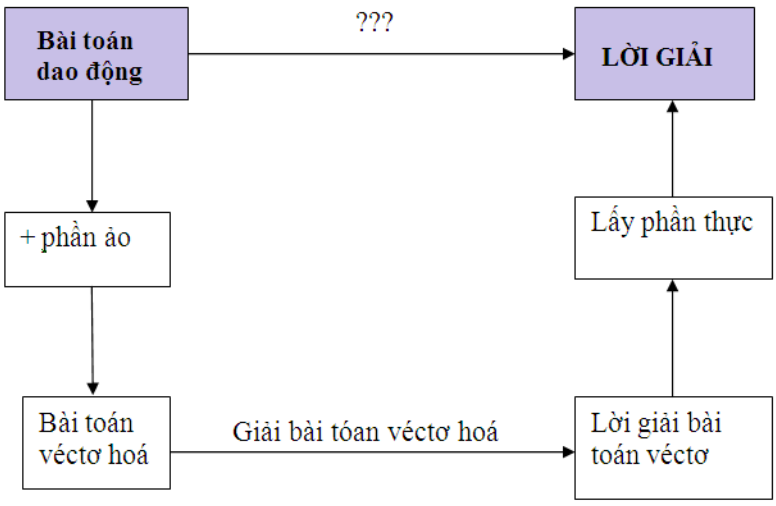


Hình 1.5 – Biểu diễn dao động bằng Vectơ quay

Khi tính toán chúng ta thường véctơ hoá các bài toán dao động nghĩa là biểu diễn các dao động bằng véctơ hay số phức, sau đó tiến hành các phép tính cộng, trừ các véctơ, nhân các véctơ với một số cũng như đạo hàm, tích phân, vi phân các véctơ theo thời gian… để giải bài toán. Kết quả của bài toán này sẽ là một véctơ hay số phức. Ta chỉ cần chiếu véctơ đó lên trục thực hay lấy phần thực của số phức kết quả đó sẽ được lời giải của bài toán an đầu.

Sơ đồ thuật toán giải quyết bài toán dao động bằng phương pháp véctơ hóa có thể tóm tắt trên hình 1.6.

Trong những phần tiếp sau chúng ta sẽ thấy rõ ứng dụng của phương pháp trên.



Hình 1.6 - Thuật toán vectơ hoá

III. TỔNG HỢP VÀ PHÂN TÍCH CÁC DAO ĐỘNG

Trong thực tế ta thường gặp các bài toán trong đó một vật đồng thời tham gia nhiều dao động dẫn đến việc cần tổng hợp hoặc phân tích các dao động. Khi các dao động đã được vectơ hoá, những bài toán này trở thành những bài toán tìm tổng hoặc hiệu của các vectơ quay.

Giả sử ta cần tổng hợp 2 dao động:

$$q_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$q_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad (1\text{-}13)$$

Khi thêm vào các phần ảo tương ứng ta nhận được 2 vectơ

$$A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + j\, A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) = A_1 .\ e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)}$$

$$A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + j\, A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) = A_2 .\ e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)} \qquad (1\text{-}14)$$

Chia bài toán làm 3 trường hợp.

1. DAO ĐỘNG CÙNG PHA

Nghĩa là $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

Và $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$

Bài toán sẽ đơn giản vì các vectơ q_1, q_2 cùng nằm trên một giá.

$q = q_1 + q_2 = A_1 . e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + A_2 . e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)}$

$= (A_1 \pm A_2) . e^{j(\omega t + \varphi)}$ (1-15)

Có nghĩa là dao động tổng cộng cũng có cùng pha và biên độ bằng tổng đại số các biên độ của dao động thành phần.

2. CÁC DAO ĐỘNG CÙNG TẦN SỐ

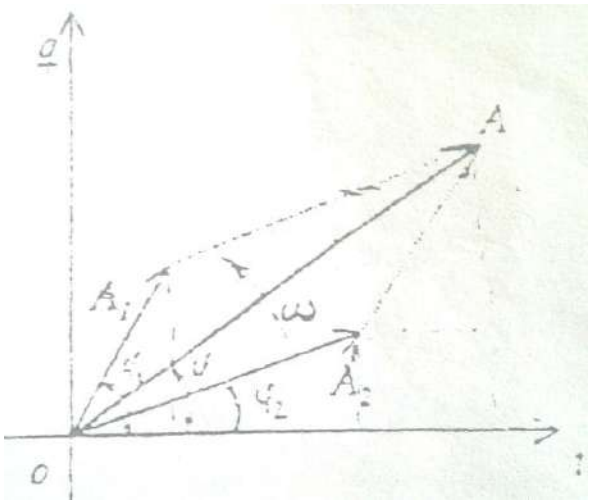
Nghĩa là $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

Và $\varphi_1 \neq \varphi_2$

Do các tần số bằng nhau nên các vertơ q_1 và q_2 sẽ cùng quay quanh gốc O với vận tốc ω, tam giác $OA_1 A_2$ trong khi quay sẽ không bị biến dạng.

Vì thế dao động tổng cũng có cùng tần số vòng ω, có dạng:

$q = A\cos(\omega t + \varphi)$ và biên độ bằng tổng (hình học) các vectơ q_1 và q_2 .



Hình 1.7 – Biểu diễn vectơ hình học

Theo các quan hệ hình học của các vectơ trên hình 1.7, xây dựng tại thời điểm t = 0, ta có biên độ của vector tổng :

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$ (a) (1-16)

Hay $\mathbf{A} = \sqrt{(A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2)^2 + (A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2)^2}$ (b)

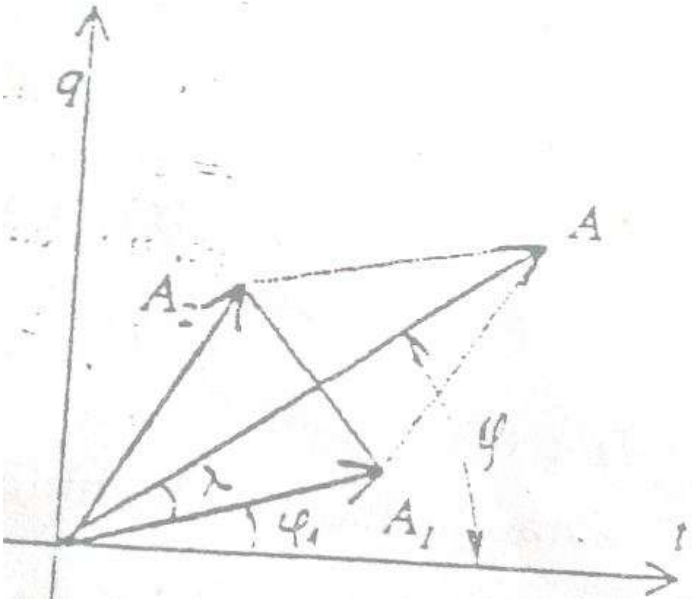
Góc lệch pha của 2 dao động:

$$\text{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} \qquad (1\text{-}17)$$

Các trường hợp đặc biệt:

a. Các dao động có cùng biên độ: nghĩa là ngoài điều kiện là $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ và $\varphi_1 \neq \varphi_2$, các dao động còn có $A_1 = A_2$ (hình 1.8)

Khi đó hình bình hành trở thành hình thoi.



Hình 1.8 – Biểu diễn vectơ hình học

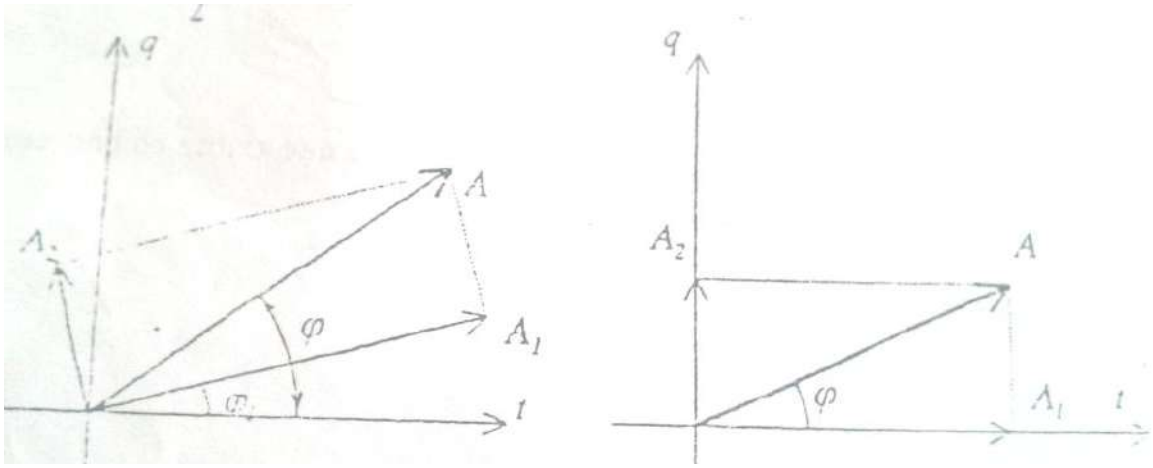
Nếu $(\varphi_1 - \varphi_2) = 2\lambda$ thì biên độ của dao động là:

$$A = A_1 \cos\lambda \qquad (1\text{-}18)$$

Còn góc lệch pha của nó là:

$$\varphi_1 = \varphi_1 + \lambda = \varphi_2 - \lambda \qquad (1\text{-}19)$$

b. Các góc lệch pha hơn kém nhau $\frac{\pi}{2}$:



Hình 1-9: Tổng hợp các dao động cùng tần số

Khi đó vectơ q_1 và q_2 sẽ vuông góc với nhau (hình 1-9a):

Độ dài của vectơ tổng: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ (1-20)

Góc lệch pha của nó $\varphi = \varphi_1 + \text{arctg}\frac{A_2}{A_1} = \varphi_2 - \text{arctg}\frac{A_2}{A_1}$ (1-21)

Trong điều kiện này nếu thêm điều kiện $\varphi_1 = 0$ thì $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (hình 1-9b)

Ta có $q = A_1 \cos \omega t + A_2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

$= A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$

$= q_0 \cos(\omega t + \varphi)$

Trong đó $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ và $\text{tg}\varphi = \frac{A_2}{A_1}$

3. CÁC DAO ĐỘNG KHÁC PHA

Nghĩa là $\omega_1 \neq \omega_2$ và $\varphi_1 \neq \varphi_2$

Nghiên cứu một cách chính xác bằng lý thuyết trường hợp này sẽ rất phức tạp.

Ở đây ta xét một trường hợp đơn giản và hay xẩy ra trong thực tế, đó là trong trường hợp dao động có tần số gần bằng nhau $\omega_1 \approx \omega_2$

Trong trường hợp này :

* Nếu $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ là một số vô tỉ, dao động sẽ không có chu kỳ.

* Nếu $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}$ trong đó n_1 ; n_2 nguyên thì dao động tổng có thể không điều hoà nhưng sẽ tuần hoàn nghĩa là có chu kỳ.

Chu kỳ đó là $T = n_1 T_1 = n_2 T_2 = \frac{n_1 2\pi}{\omega_1} = \frac{n_2 2\pi}{\omega_2}$ (1-22)

Ta tính độ dài vectơ biên độ tổng tại thời điểm t:

$$A = \sqrt{A_1^2 - A_2^2 - 2A_1A_2\cos[(\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)]} \quad (1\text{-}23)$$

Bởi vì $\omega_1 \approx \omega_2$ nên $\omega_2 - \omega_1$ nhỏ cos $[(\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)]$ thay đổi chậm theo thời gian nên biên độ A cũng thay đổi chậm theo thời gian.

Như vậy dao động tổng là dao động họ hình sin với biên độ biến đổi theo hàm số $\cos(\omega_2 - \omega_1)t$. Hiện tượng này gọi là hiện tượng phách của dao động. Chu kỳ biến đổi biên độ còn gọi là bước phách.

$$T_A = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

Trên hình 1-7 ta cũng thấy do $\omega_1 \approx \omega_2$ nên trong quá trình quay giống như kim giờ và kim phút của một chiếc đồng hồ, góc hợp bởi vectơ q_1 và q_2 cũng dần thay đổi. Nói cách khác các vectơ q_1 và q_2 cũng quay tương đối so với nhau. Từ đó tam giác OA_1A_2 sẽ bị biến dạng trong quá trình quay, dẫn đến biên độ dao động tổng thay đổi theo thời gian. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biên độ có thể xác định được khi các vectơ q_1 và q_2 cùng phương, cùng hướng và cùng phương nhưng ngược hướng với nhau:

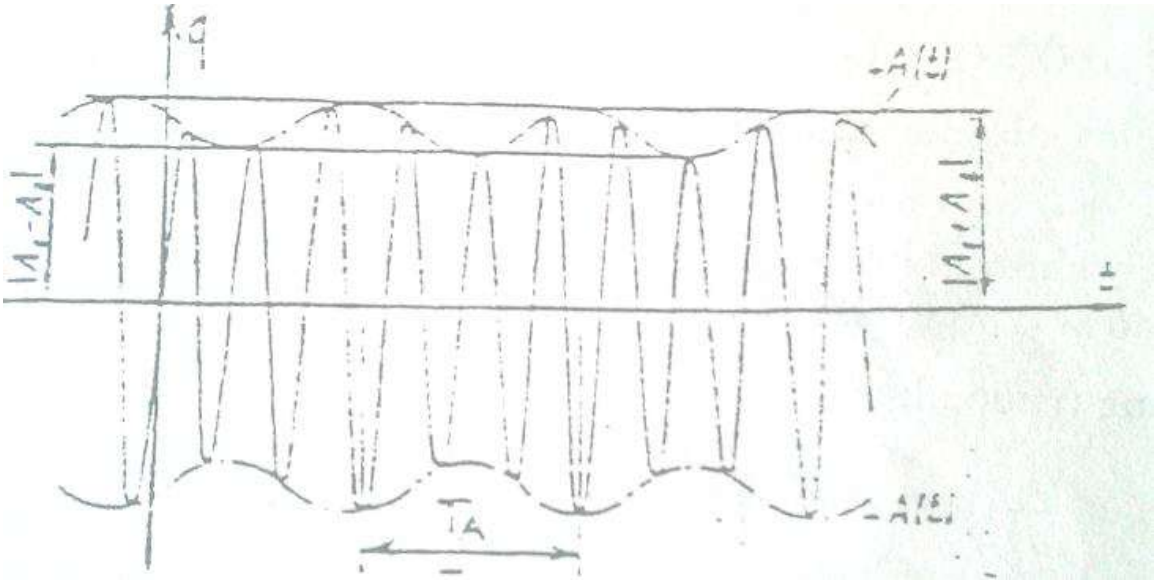
$$|A_1 - A_2| < A < A_1 + A_2 \quad (1\text{-}25)$$

Khi $A_1 \neq A_2$ ta có hiện tượng phách thường (hình 1-16).

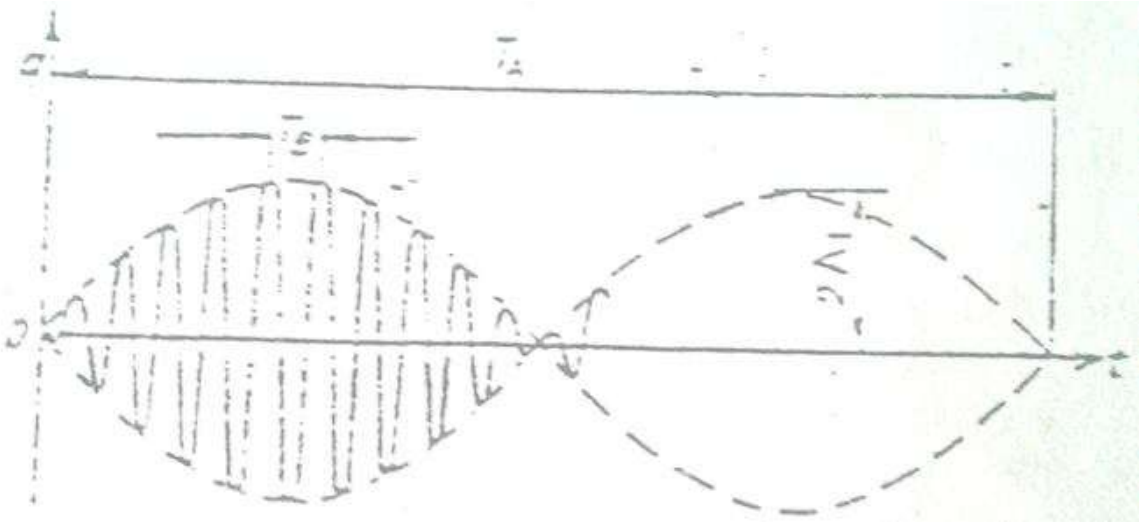
Khi $A_1 = A_2$ ta có $2\lambda \geq A \geq 0$ (1-26)

Gọi là phách toàn phần. Khi này biên độ dao động tổng có trị số nhỏ nhất

bằng 0 và lớn nhất bằng 2 lần biên độ dao động thành phần (hình 1-11).



Hình 1.10 – Hiện tượng phách thường



Hình 1.10 – Hiện tượng phách toàn phần

IV. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Câu 1 - Dao động là gì?

Thế nào là dao động họ hình sin và dao động điều hoà.

Câu 2 - Các đặc trương cơ bản của dao động:

- Biên độ
- Chu kỳ, tần số, tần số vòng
- Pha và pha ban đầu ….

Ý nghĩa vật lý của chúng.

Câu 3 - Các cách biểu diễn dao động? Xác định các đặc trưng cơ bản của dao động trong các cách biểu diễn ấy.

Câu 4 - tổng hợp 2 dao động:

- Cùng pha
- Cùng tần số
- Khác pha.

Câu 5 - Cho PTDĐ của vật có dạng x= 5sin(2πt) cm. Pha ban đầu của dao động là :

a) 0 b) $-\frac{\pi}{2}$ c)π d)2π

Câu 6 - Cho PTDĐ của vật có dạng x= -5sin(2πt) cm. Pha ban đầu của dao động là :

a) 0 b) $-\frac{\pi}{2}$ c)π d)2π

Câu 7 - PTDĐ của vật có dạng x=Asin(5πt)+Acos(5πt) cm. Biên độ dao động của vật là :

a) $\frac{A}{2}$ b)A c)$A\sqrt{2}$ d) $A\sqrt{3}$

Câu 8 - Con lắc lò xo gồm vật m và lò xo có độ cứng k dao động điều hòa, khi mắc thêm vào vật m vào một vật khác có khối lượng gấp 3 lần vật m thì chu

kỳ dao động của chúng là :

a) Tăng lên 3 lần b) giảm đi 3 lần c) Tăng lên 2 lần d) giảm đi 2 lần

Câu 9 - Biểu diễn các dao động sau đây dưới dạng số phức hoặc vectơ quay:

a- Dao động Z có biên độ bằng 3 cm và tần số f = 20 Hz, góc lệch pha $\varphi = 30^0$

b- Dao động $\varphi = 0{,}2\cos(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4})$ rad

c Dao động X = 5 cos2,1t +4sin2,1t (cm).

Câu 10 - Xác định các thông số: biên độ, tần số, tần số vòng, góc lệch pha của các dao đông trên.

Câu 11 - Cho $Z_1 = A\cos\Omega t + jB\sin\Omega t$, $Z_2 = C.e^{j\Omega t}$

Tính: $Z_1 + Z_2$ và $Z_1 - Z_2$

Câu 12 -Một vật dao động điều hòa cứ 10 s thì thực hiện được 20 dao động. Biên độ dao động của vật là 1 cm. Tại thời điểm t=0 : x=0, v=4π cm/s.

1) Viết PTDĐ

2) Tính vận tốc và gia tốc của vật trong hai trường hợp:

a) khi vật đi qua vị trí cân bằng.

b) Khi vật ở vị trí biên.

Câu 13 - Một toa xe (hình BT1-1) chạy trên đường lồi lõm có qui luật:

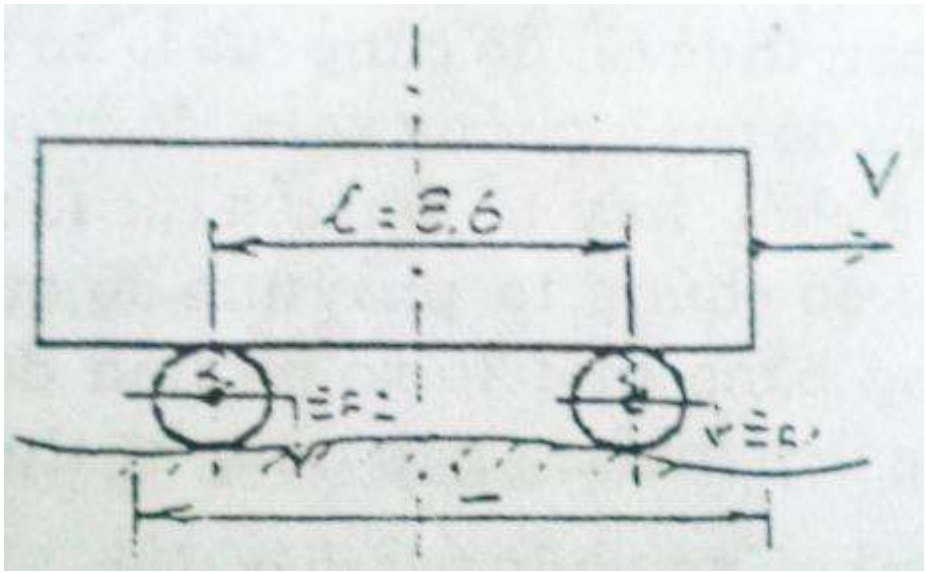
$Z_D = 0{,}01 \cos \frac{2\pi}{L} X = 0.01 \cos \frac{2\pi V}{L} t$

Với vận tốc V = 50 km/h và chiều dài thanh ray L-12,5m.

Tính dao động kích thích tổng của các bánh xe lên thùnh xe:

$Z_{\lambda t} = \frac{Z_{B1} + Z_{B2}}{2}$

Biết khoảng cách 2 trục bánh xe L = 8,6 (m).



Hình BT1.1 Toa xe trên đường lồi lõm

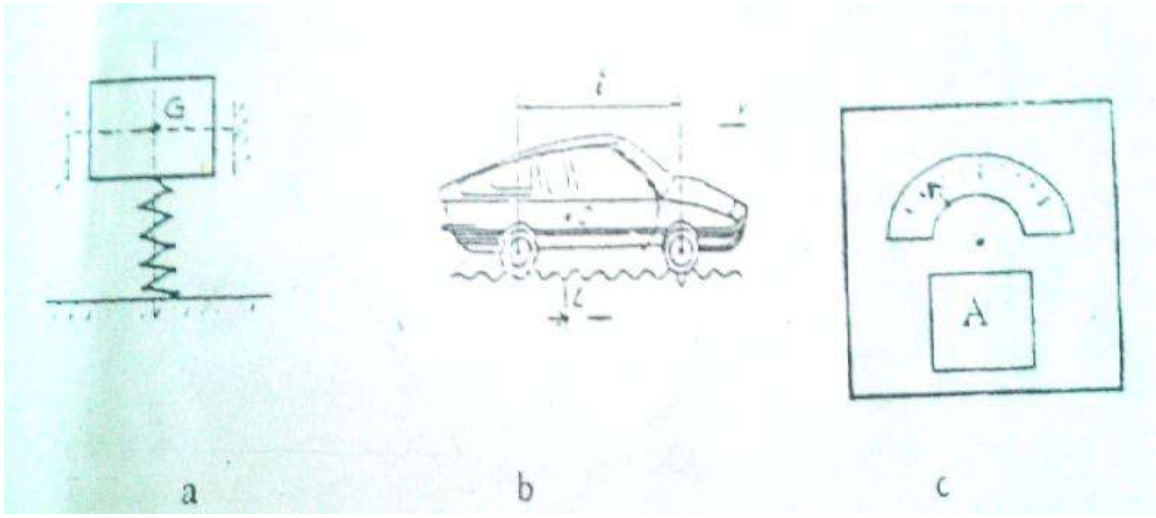
Chương 2- DAO ĐỘNG CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

I. MÔ HÌNH VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CỦA HỆ DAO ĐỘNG MỘT BẬC TỰ DO

1. MÔ HÌNH

Hệ một bậc tự do là hệ cơ học mà vị trí của vật trong không gian có thể xác định bằng một tọa độ suy rộng duy nhất.

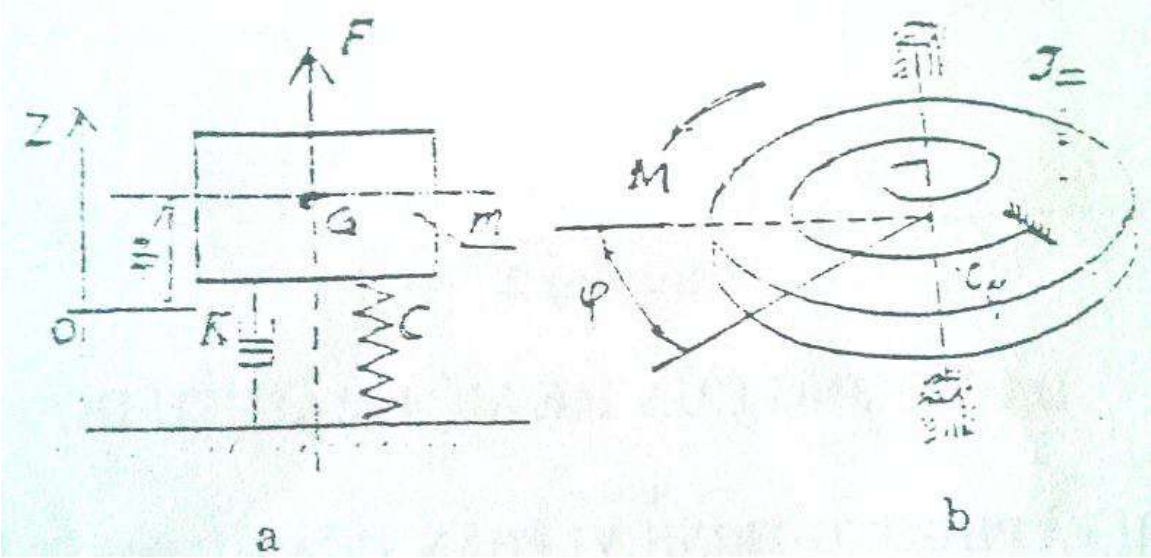
Trong nhiều trường hợp chúng ta gặp trong thực tế, dao động của vật có thể mô hình hóa thành hệ dao động một bậc tự do. Hai dạng thường gặp của chúng là *dao động có chuyển vị đường* ví dụ dao động của vật trong ke trượt (a), dao động của ô tô, tàu hỏa (b), và *dao động có chuyển vị góc*, ví dụ như dao động của kim đồng hồ đo điện khi bắt đầu hoặc kết thúc phép đo (c), hình 2.1.



Hình 2.1 Ví dụ về dao động 1 bậc tự đo

Mô hình chung của dao động có chuyển vị đường thể hiện trên hình 2.2a. Đó là một vật có khối lượng m, trọng tâm G đặt trên một lò xo có độ cứng C và một giám chấn có hệ số cản K, lực kích thích làm cho vật dao động là F.

Tương tự, mô hình dao động có chuyển vị góc là một vật có mômenquán tính đối với trục quay J, gắn với trục thông qua một lò xo có độ cứng xoắn C_φ và một giảm chấn có hệ số cản K_φ, mômen kích thích dao động là M (hình 2.2b).



Hình 2.2- Mô hình dao động một bậc tự do

2. CÁC YẾU TỐ CẤU THÀNH MÔ HÌNH

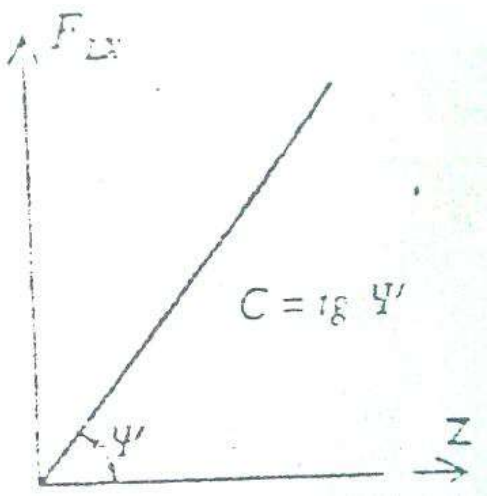
a. ***Vật thể***: được đặc trưng bằng khối lượng m đặt tại trọng tâm G (hoặc mômenquán tính khối lượng đối với trục quay J).

Vị trí cân bằng Z=0 được chọn là vị trí trọng tâm G khi lò xo chịu độ nhún tĩnh (dưới tác dụng của trọng lượng P=mg). Chuyển vị của vật thể được xem là chuyển vị của trọng tâm G kể từ vị trí cân bằng.

Khi có lực kích thích vật sẽ chuyển động xung quanh vị trí cân bằng.

b. ***Lò xo***: đại diện cho các mối liên kết đàn hồi như lò xo tròn, nhíp, đệm cao su, lò xo không khí (lốp hơi)… cũng như các mối liên kết sinh ra lực hồi vị khác. Khi lò xo bị nén lại hoặc kéo dãn ra sẽ phát sinh lực hồi vị (muốn đưa vật về vị trí cũ). Trị số của lực này là hàm số của độ nhún (chuyển vị):

$$F_{lx} = f'(Z) \quad [\text{N}] \qquad (2\text{-}1)$$



Hình 2.3- Đặc tính và độ cứng của lò xo

Đường biểu diễn quan hệ giữa lực hồi vị và độ nhún gọi là *đặc tính của lò xo* (hình 2.3).

Đạo hàm của đường đặc tính tại một điểm gọi là *độ cứng của lò xo* tại điểm đó:

$$C = \frac{dF_{lx}}{dz} \text{ [N/m]} \qquad (2\text{-}2)$$

Lò xo tròn có đặc tính là đường thẳng đi qua gốc tọa độ.

Ta nói lò xo này có *đặc tính tuyến tính*:

$$F_{lx} = CZ \quad \text{[N]} \qquad (2\text{-}3)$$

Trong đó độ cứng:

$$C = tg\Psi = const \text{ [N/m]} \qquad (2\text{-}4)$$

Các dạng lò xo khác như lò xo nón, lò xo cao su, lò xo không khí…thường có đặc tính không phải là đường thẳng, do đó độ cứng của chúng cũng không là hằng số. Nói chung là :

$$C = f(z) \text{ [N/m]} \qquad (2\text{-}5)$$

Ta gọi các lò xo đó là các lò xo có *đặc tính phi tuyến*.

Trong một số bài toàn thực tế, độ cứng của lò xo trong mô hình có thể là độ cứng chống kéo nén, độ cứng chống xoắn, độ cứng chống uốn của một thanh tiết

diện đều đồng chất hay tổ hợp của các lò xo mắc nối tiếp hoặc song song với nhau. Khi đó chúng ta phải tính độ cứng theo sức bền vật liệu hoặc thay thế chúng bằng một lò xo rồi tính độ cứng tương đương.

Sau đây là một số trường hợp thường gặp trong kĩ thuật:

* *Độ cứng của thanh đồng chất tiết diện đều*:

° Khi thanh chịu kéo nén bởi lực F (hình2.4) thì độ dãn của thanh là:

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES}$$

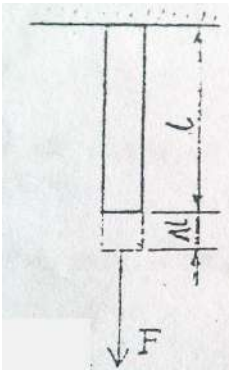
Trong đó: E: mô đun đàn hồi của vật liệu;

S: tiết diện ngang của vật liệu.

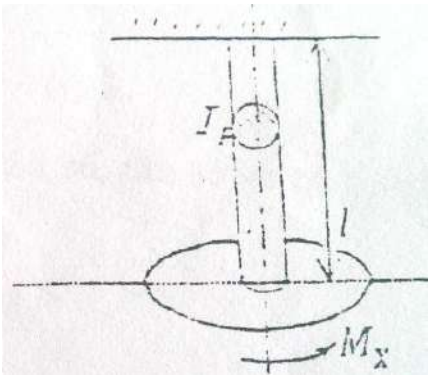
Từ đó: $F' = \frac{ES}{l}\Delta l = C_z \Delta l$

Nếu coi thanh như là một lò xo thì độ cứng chống kéo nén của thanh là:

$$C_z = \frac{ES}{l} \qquad (2\text{-}6)$$



Hình 2.4 - Thanh đàn hồi chịu kéo nén



Hình 2.5- Thanh tiết diện đều chịu xoắn

°Khi thanh chịu xoắn bởi momen M_x (hình 2-5) ta tính được góc xoắn tại tiết diện cách gốc một khoảng l:

$$\varphi = \frac{M_x l}{G l_p}$$

Trong đó: G: mô đun trượt của vật;

l_p : momen quán tính cực của tiết diện ngang.

Từ đó:

$$M = \frac{Gl_p}{l}\varphi = C.\varphi$$

Độ cứng chống xoắn của thành là $C_0 = \frac{Gl_p}{l}\varphi = C.\varphi$ (2-7)

°Khi thanh là dầm công son chịu uốn bởi lực F (hình 2-6), ta tính độ võng ở đầu dầm:

$$f = \frac{1}{3}.\frac{Fl^3}{EI}$$

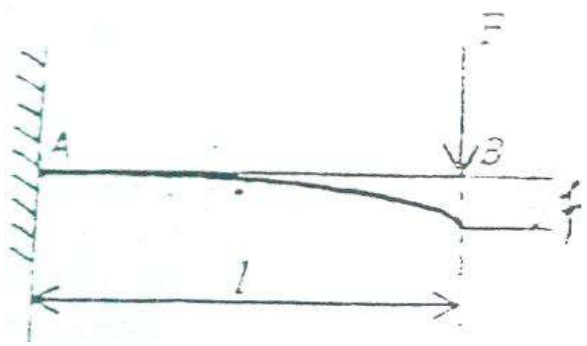
Trong đó: El là độ cứng chống uốn

Từ đó:

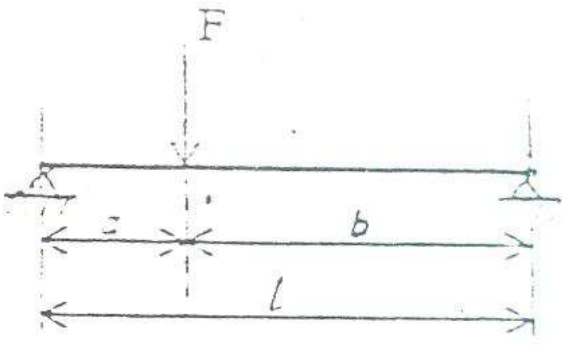
$$F = \frac{3EI}{l^3}.f = C.f$$

Độ cứng chống uốn ở đầu công son:

$$C = \frac{3EI}{l^3} \quad (2\text{-}8)$$



Hình 2.6 - Công son chịu uốn



Hình 2.7- Dầm chịu uốn

° Khi thanh là dầm 2 gối chịu uốn bởi lực F có khoảng cách đến các gối là a va b (hình 2.7).

Ta tính được độ võng tại điểm đặt lực:

$$f = \frac{Fa^2b^2}{3EI(a+b)}$$

Từ đó: $F = \frac{3EI(a+b)}{a^2b^2} f = C_D f$

Độ cứng của dầm tại điểm đặt lực:

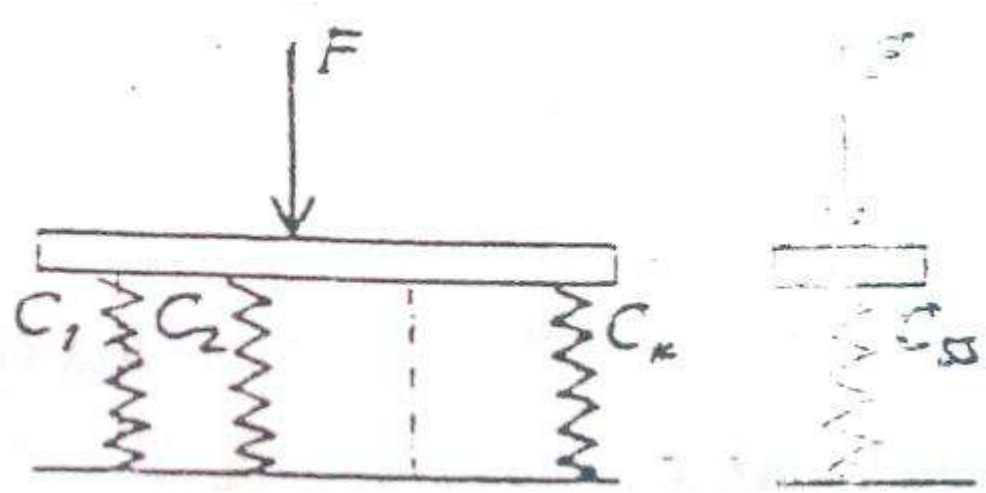
$$C_D = \frac{3EI(a+b)}{a^2b^2} \quad (2\text{-}9)$$

Trường hợp lực đặt giữa dầm, thay l = (a+b) = 2a = 2b

Ta được: $C_D = \frac{48EI}{l^3}$

* ***Độ cứng tổ hợp của các lò xo***:

- Trường hợp tổ hợp các lò xo mắc song song, tat hay các lò xo có độ cứng $C_1, C_2, \ldots C_n$ bằng một lò xo có độ cứng C_{ss}.



Hình 2.8- Lò xo mắc song song

Do các lò xo có độ nhún bằng nhau:

$f_1 = f_2 = \ldots = f_n = f_{ss}$

Hay $\frac{F_1}{C_1} = \frac{F_2}{C_2} = \ldots = \frac{F_n}{C_n} = \frac{F_{ss}}{C_{ss}}$

Lấy tổng các tử số và các mẫu số của n phân số đầu ta được:

$$\frac{\sum F_i}{\sum C_i} = \frac{F_{ss}}{C_{ss}}$$

Nhưng vì $F = \sum_{i=1}^{n} F_i$ nên suy ra $C_{ss} = \sum_{i=1}^{n} C_i$ (2-10)

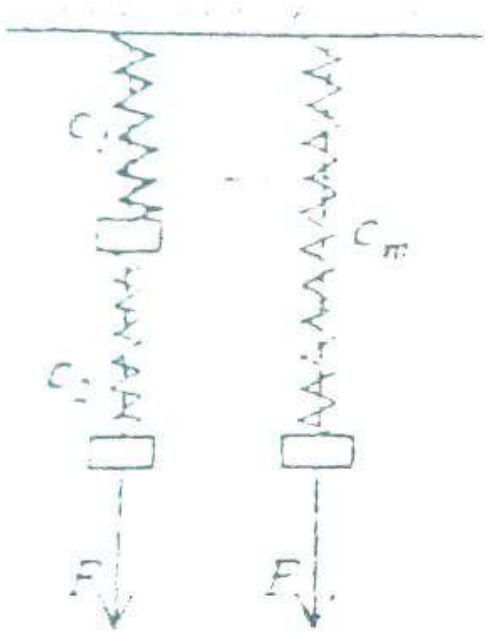
- Trong trường hợp các lo xo mắc nối tiếp, ta thay tổ hợp các lò xo có độ cứng C_1, C_2, …C_n bằng một lò xo có độ cứng C_{nt}. Bởi vì độ dãn của lò xo tương đương bằng tổng độ dãn của các lò xo thành phần:

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{nt}$$

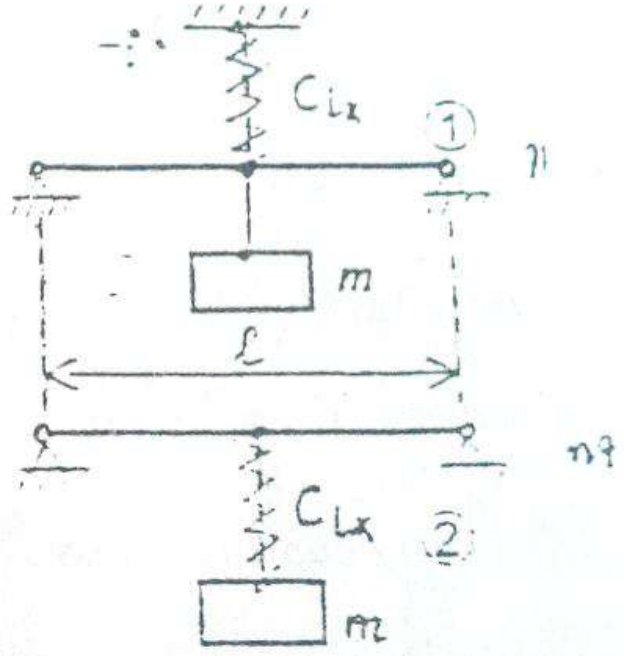
và lực tác động lên các lò xo là như nhau nên:

$$\frac{F}{C_1} + \frac{F}{C_2} + \ldots\ldots + \frac{F}{C_n} = \frac{F}{C_{nt}}$$

Từ đó: $$\frac{1}{C_{nt}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_n} \qquad (2\text{-}11)$$



Hình 2.9: Lò xo mắc nối tiếp



Hình 2.10

Ví dụ: Một hệ dao động tạo bởi một vật có khối lượng m mắc vào một dầm 2 gối chịu uốn ở điểm giữa và một lò xo có độ cứng C (hình 2.10).

+Nếu theo sơ đồ 1 thì dầm và lo xo ghép song song.

Ta tính được:

$$C_{td} = C_{lx} + C_D = C_{lx} + \frac{48EI}{l^3}$$

+ Nếu theo sơ đồ 2 thì dầm và lò xo ghép nối tiếp.

Ta có:

$$\frac{1}{C_{td}} = \frac{1}{C_{lx}} + \frac{1}{C_D}$$

Ta được:

$$C_{td} = \frac{C_{lx}C_D}{C_{lx} + c_D} = \frac{48EIC_{lx}}{C_{lx}l^3 + 48EI}$$

c. ***Giảm chấn****:* đại diện cho các mối liên kết tiêu hao năng lượng làm giảm dao động như các loại giảm chấn ma sát, giảm chấn thủy lực, các loại ma sát và sức cản sinh ra khi vật chuyển động.

Đồ thị biểu diễn quan hệ của lực cản với tốc độ gọi là *đặc tính của giảm chấn*:

$$F_c = f(\frac{dz}{dt}) = f(V) \quad [\text{N}] \qquad (2\text{-}12)$$

Đạo hàm của đường đặc tính này tại một điểm gọi là *hệ số cản của giảm chấn*:

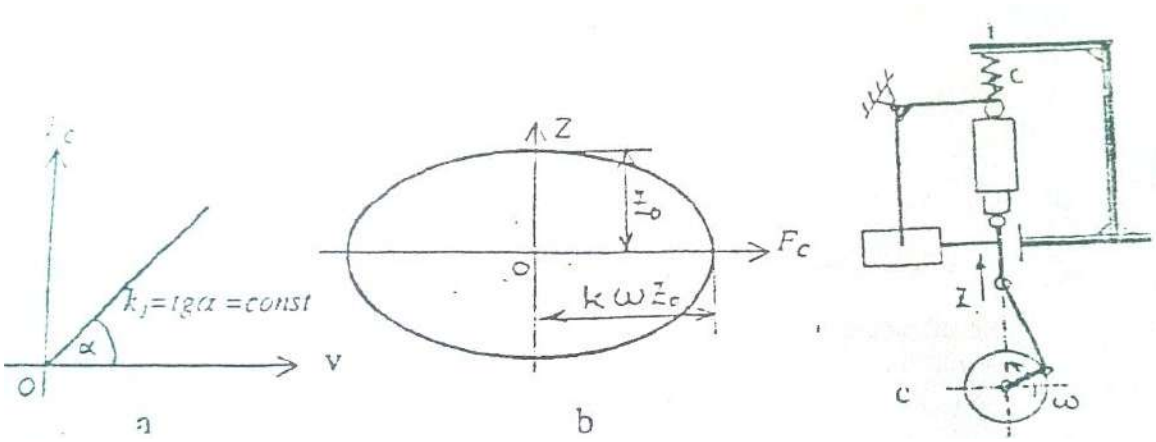
$$k = \frac{dF_c}{dV} \quad [\text{Ns/m}] \qquad (2\text{-}13)$$

- *Các giảm chấn thủy lực*: thường có lực cản tỉ lệ bậc nhất với tốc độ nên đặc tính của chúng là tuyến tính như hình 2.11a.

$$F_c = k_1 \frac{dz}{dt} \ [\text{N}] \qquad (2\text{-}14)$$

Hệ số cản của loại giảm chấn này là hằng số:

$$k_1 = \text{tg}\alpha = \text{const} \ [\text{Ns/m}] \qquad (2\text{-}15)$$



Hình 2.11

a- Đặc tính và hệ số cản của giảm chấn TL; b-Đồ thị công cản của giảm chấn TL; c-Sơ đồ máy thử giảm chấn TL.

Trên máy thử giảm chấn thủy lực (hình 2-11c) người ta dẫn động giảm chấn này bằng một dao động điều hòa $Z= Z_0 \cos\omega t$ tạo ra từ cơ cấu tay quay thanh truyền.

Do $V = \dfrac{dz}{dt} = \omega Z_0 \sin(\omega t)$ nên $F_c = kV = k\omega Z_0 \sin(\omega t)$

Thay giá trị của $\sin(\omega t)$ ta được:

$$F_c = k\omega Z_0 \sqrt{1-(\frac{Z}{Z_0})^2}$$

Hay là:
$$\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^2 + \left(\frac{F_c}{k\omega Z_0}\right)^2 = 1 \qquad (2\text{-}16)$$

Ở đây k, ω, Z_0 là những hằng số.

Như vậy quan hệ giữa lực cản và chuyển vị gọi là đồ thị công cản của giảm chấn thủy lực trong một chu kỳ là hình ellipse (hình 2.11b). Diện tích của ellipse này là công của lực cản tiêu hao trong một chu kỳ.

$$A = \pi k \omega r Z_0^2 \qquad (2\text{-}17)$$

Khi thử nghiệm giảm chấn thủy lực, máy thử sẽ vẽ cho ta đặc tính hình ellipse này. Dựa vào những thông số đã biết của máy thử và tỉ lệ các trục của đặc

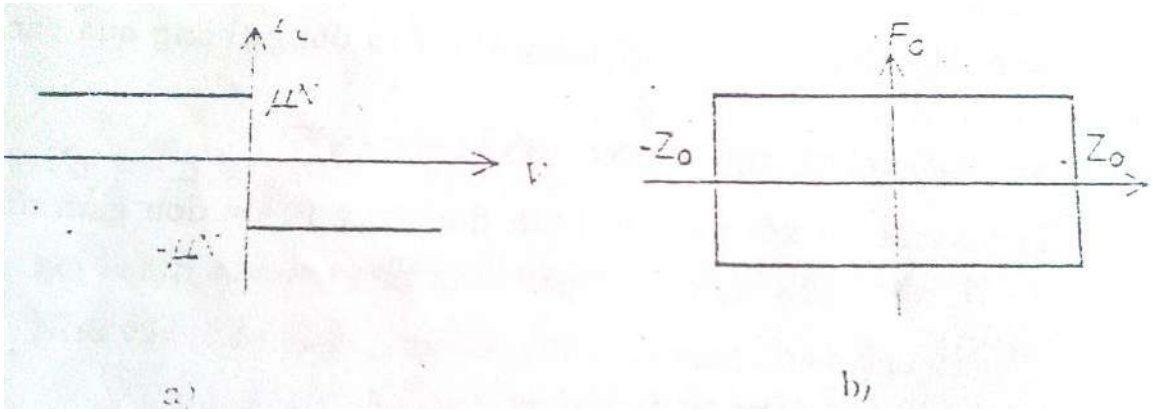
tính thu được, ta có thể tính ra được hệ số cản k và công cản A của giảm chấn đang thử sau một chu kỳ và kết luận được về chất lượng của giảm chấn.

- *Các giảm chấn ma sát*: có lực cản là các lực ma sát, các lực ma sát này thường là hằng số và chỉ phụ thuộc hướng của vận tốc:

$$F_{ms} = \begin{cases} -\mu N & Khi\ V > 0 \\ \mu N & Khi\ V < 0 \end{cases} \qquad (2\text{-}18)$$

Do đó đặc tính của giảm chấn ma sát là 2 nửa đường thẳng song song với trục V và nằm ở góc phần tư thứ hai và thứ tư (hình 2.12a).

Đồ thị công cản của giảm chấn ma sát hình chữ nhật như hình 2.12b.



Hình 2.12

a- Đặc tính của giảm chấn ma sát

b- Đồ thị công cản của giảm chấn ma sát.

d. ***Lực kích thích***: là những lực gây nên dao động của vật, nó có thể tác dụng theo những qui luật khác nhau:

- Kích thích một lần: Lực kích thích F có thể chỉ xuất hiện một lần duy nhất làm cho vật dao động rồi thôi. Sau đó vật tự dao động và trong quá trình dao động đó không có sự tham gia của lực kích thích. Dao động của vật lúc này gọi là dao động tự do.

- Kích thích đều đặn, liên tục: theo một qui luật nhất định trong suốt quá trình vật dao động, tạo cho vật những dao động cưỡng bức.

* Nếu qui luật của lực kích thích thay đổi theo hình sin:

$$F = F_0 \cos(\Omega t + \varphi) \qquad (2\text{-}19)$$

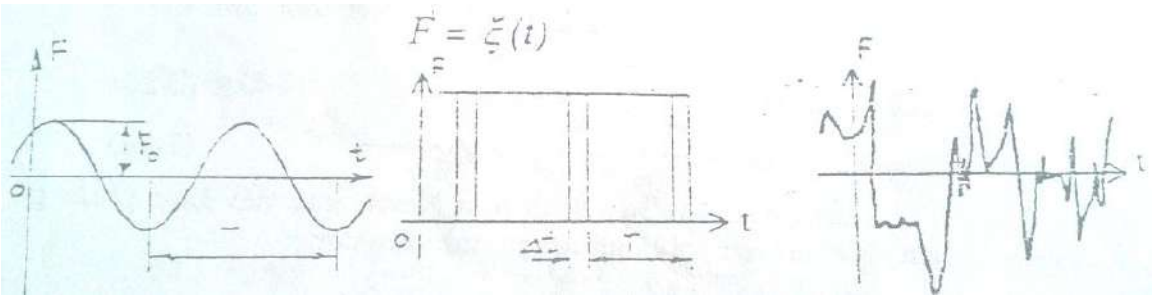
Ta gọi là *kích thích điều hòa.*

* Nếu qui luật của lực kích thích thay đổi một cách tuần hoàn ta có thể phân tích thành tổng của những hàm kích thích điều hòa bằng công thức Fourier.

* Nếu lực F tác dụng cách quãng, cứ sau một thời gian T (sau một chu kỳ) lại tác dụng một lần trong thời gian rất ngắn, ta gọi là kích thích xung.

- *Kích thích ngẫu nhiên:* Nếu qui luật kích thích là kết quả ngẫu nhiên thu được bằng phép đo, ta có quá trình *kích thích ngẫu nhiên:*

$$F = \xi(t) \qquad (2\text{-}20)$$



Hình 2.13 Các qui luật biến đổi của lực kích thích

a- Kích thích điều hòa b- Kích thích xung c- Kích thích ngẫu nhiên

Trong khuôn khổ của giáo trình này, chúng ta chỉ quan tâm đến những hệ dao động có kích thích là hàm điều hòa dạng (2-19) vì những kích thích tuần hoàn cũng có thể phân tích ra tổng của những hàm số có dạng này.

3. PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG

Chúng ta có thể thành lập PTDĐ dựa trên *sự cân bằng lực* hay dựa trên *phương trình Lagrange loại II*.

Cho dù sử dụng phương pháp nào thì kết quả PTDĐ thu được cũng giống nhau.

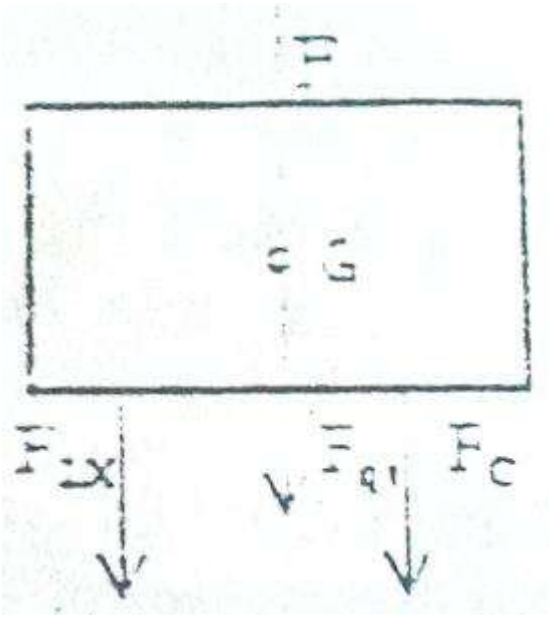
Giả sử ta thành lập PTDĐ của vật có khối lượng m trong mô hình một bậc tự do đơn giản nhất như hình vẽ 2.2 với các đặc tính của lò xo và giảm chấn đều là

tuyến tính:

- Lò xo có độ cứng: C [N/m] = const,
- Hệ số cản của giảm chấn: K [Ns/m] = const

a. **Sử dụng phương trình cân bằng lực**:

Chọn vị trí cân bằng Z=0 là vị trí trọng tâm của vật khi lò xo chịu độ nhún tĩnh. Khi vật có chuyển vị Z ra khỏi vị trí cân bằng sẽ có các lực tác dụng:



Hình 2.14- Các lực tác dụng vào vật dao động

* Lực quán tính:

$$F_{qt} = -m\frac{d^2Z}{dt^2} \qquad (2\text{-}21)$$

* Lực cản của giảm chấn:

$$F_c = -K\frac{dz}{dt} \qquad (2\text{-}22)$$

* Lực hồi vị của lò xo:

$$F_{lx} = -CZ \qquad (2\text{-}23)$$

* Lực kích thích điều hòa:

$$F = F_0\cos(\Omega t) \qquad (2\text{-}24)$$

Xét cân bằng của vật, theo định luật Newton ta viết phương trình cân bằng lực hay còn gọi là PTDĐ:

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + K\frac{dZ}{dt} + CZ = F \qquad (2\text{-}25)$$

b. **Sử dụng phương trình Lagrange loại II**

Cũng chọn vị trí cân bằng như trên, tại thời điểm t khi vật có chuyển vị Z.

Biểu thức động năng của hệ là:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}m\dot{Z}^2$$

Biểu thức thế năng của hệ là:

$$\Pi = \frac{1}{2}CZ^2$$

Biểu thức hàm hao tán có dạng:

$$\Phi = \frac{1}{2}K.\dot{Z}^2$$

Ta tính được các đạo hàm riêng:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{Z}} = m\dot{Z} \qquad \frac{\partial T}{\partial Z} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Z} = CZ \qquad \frac{\partial \phi}{dZ} = K\dot{Z}$$

Thay vào phương trình Lagrange loại II

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}} + Q$$

$$m\frac{d}{dt}\left(\dot{Z}\right) - 0 = -CZ - K\dot{Z} + F$$

Ta được PTDĐ có dạng giống như phương trình (2-2):

$$m\ddot{Z} + K\dot{Z} + CZ = F$$

PTDĐ là một phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất có hệ số hằng số. Ta cần giải phương trình này để tìm qui luật dao động Z= Z(t) và các thông số của nó.

Như ta đã biết trong toán học, nghiệm của phương trình này là nghiệm của hai thành phần nghiệm, mỗi thành phần biểu diễn như một loại dao động:

+ *Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất* có vế phải bằng không (F=0) biểu diễn dao động không có lực kích thích, đó là dao động tự do.

+ *Nghiệm riêng của phương trình vi phân không thuần n*hất có vế phải khác không, biểu diễn dao động có lực kích thích gọi là dao động cưỡng bức.

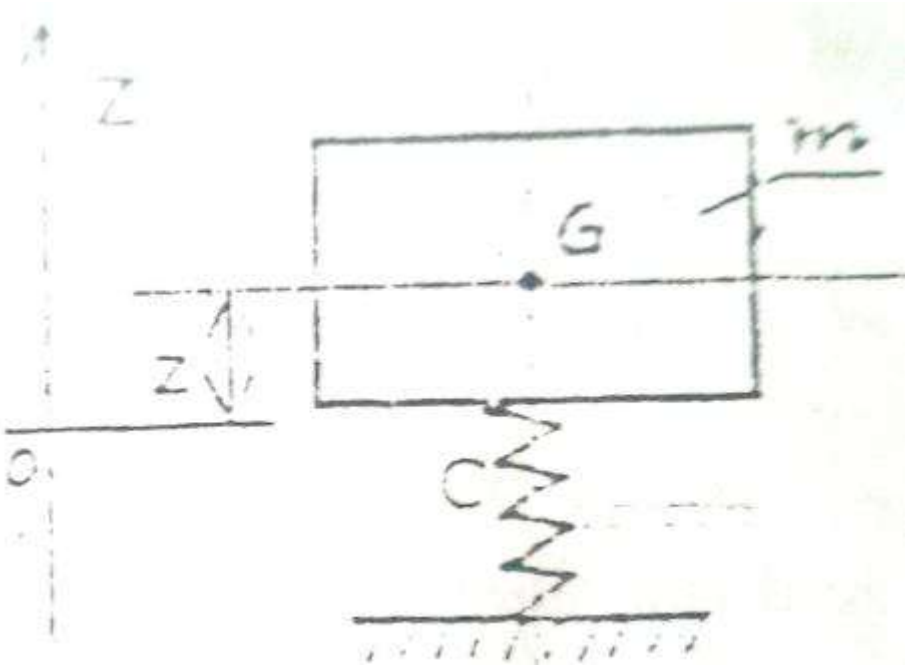
Sau đây, chúng ta xét kỹ từng loại dao động thông qua các nghiệm đó.

II. DAO ĐỘNG TỰ DO KHÔNG CÓ LỰC CẢN

Trước tiên ta xét một mô hình dao động tự do đơn giản nhất, đó là trường hợp dao động tự do không có lực cản.

1. MÔ HÌNH

Mô hình dao động tự do không có lực cản của hệ một bậc tự do là một vật có khối lượng m đặt trên một lò xo có độ cứng C (hình 2.15).



Hình 2.15 Mô hình dao động tự do không có lực cản

2. PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG

Ta cũng chọn vị trí Z= 0 là vị trí cân bằng tĩnh như trên. Khi vật có chuyển

vị Z chỉ có lực quán tính và lực hồi vị của lò xo tác dụng lên vật nên ta viết được phương trình cân bằng lực cũng là PTDĐ như sau:

$$m\frac{d^2Z}{dt^2} + CZ = 0 \quad \text{(a)} \qquad (2\text{-}26)$$

hay

$$m\ddot{Z} + CZ = 0 \qquad \text{(b)}$$

Phương trình này cũng có thể suy ra từ phương trình cân bằng lực (2-25) khi K và F bằng không.

3. DẠNG DAO ĐỘNG VÀ CÁC THÔNG SỐ DAO ĐỘNG

Ta tìm nghiệm của phương trình (2-26) dưới dạng:

$$Z = Ae^{\lambda t} \qquad (2\text{-}27)$$

Khi đó các đạo hàm của nó là:

$$\dot{Z} = \lambda A e^{\lambda t} = \lambda Z \quad \text{(a)} \qquad (2\text{-}28)$$

Vaø $\ddot{Z} = \lambda^2 A e^{\lambda t} = \lambda^2 Z$ (b)

Thay vào phương trình (2-26) ta được:

$$(m\lambda^2 + C)\, Ae^{\lambda t} = 0$$

Bởi vì $Z = Ae^{\lambda t}$ không đồng nhất bằng không nên ta rút ra:

$$m\lambda^2 + C = 0 \qquad (2\text{-}29)$$

(2-29) gọi là phương trình đặc trưng của hệ. Nghiệm của nó là:

$$\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{C}{m}} = \pm j\beta_0 \qquad (2\text{-}30)$$

Với:

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{C}{m}} \qquad (2\text{-}31)$$

gọi là *tần số vòng của dao động tự do không có lực cản*.

Như vậy, theo (2-27), nghiệm của PTDĐ (2-26) là:

$$Z = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$Z = A_1 e^{j\beta_0 t} + A_2 e^{-j\beta_0 t} \qquad (2\text{-}32)$$

Biến đổi các số phức ở vế phải sang dạng đại số theo công thức Euler:

$$A_1 e^{j\beta_0 t} = A_1(\cos\beta_0 t + j\sin\beta_0 t)$$

$$A_2 e^{j\beta_0 t} = A_2(\cos\beta_0 t - j\sin\beta_0 t)$$

Ta được:

$$Z = A_1(\cos\beta_0 t + j\sin\beta_0 t) - A_2(\cos\beta_0 t - j\sin\beta_0 t)$$

$$= (A_1 + A_2)\cos\beta_0 t + j(A_1 - A_2)\sin\beta_0 t$$

$$= A\cos\beta_0 t + jB\sin\beta_0 t \qquad (a)$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2}\, e^{j(\beta_0 t+\varphi)} \qquad (b) \qquad (2\text{-}33)$$

$$= Z_0\, e^{j(\beta_0 t+\varphi)} \qquad (c)$$

Trong đó: $Z_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$ vaø $tg\varphi = \frac{B}{A}$

Các hằng số A_1, A_2,A, B cũng như Z_0, φ có thể tính được từ những điều kiện ban đầu. Ví dụ với điều kiện ban dầu:

Tại thời điểm t=0 thì Z= Z_{t0} và $\dot{Z} = V_{t0}$ (2-34)

- Từ (2-33a) ta tính được A = Z_{t0} (a) (2-35)
- Từ biểu thức đạo hàm của (2-33a)

$$\dot{Z} = \beta_0[-A\sin\beta_0 t + jB\sin\beta_0 t]$$

Ta tính được $B = \frac{V_{t0}}{\beta_0}$ (b)

Theo (2-34)

$$Z_0 = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{Z_{t0}^2 + \left(\frac{V_{t0}}{\beta_0}\right)^2} \quad (c) \qquad (2\text{-}36)$$

Và $tg\varphi = \frac{B}{A}$ (d)

Hay: $\varphi = arctg\frac{V_{t0}}{\beta_0 Z_{t0}}$ (e)

Ta có thể viết lại nghiệm dạng (2-33b) khi biết điều kiện ban đầu (2-

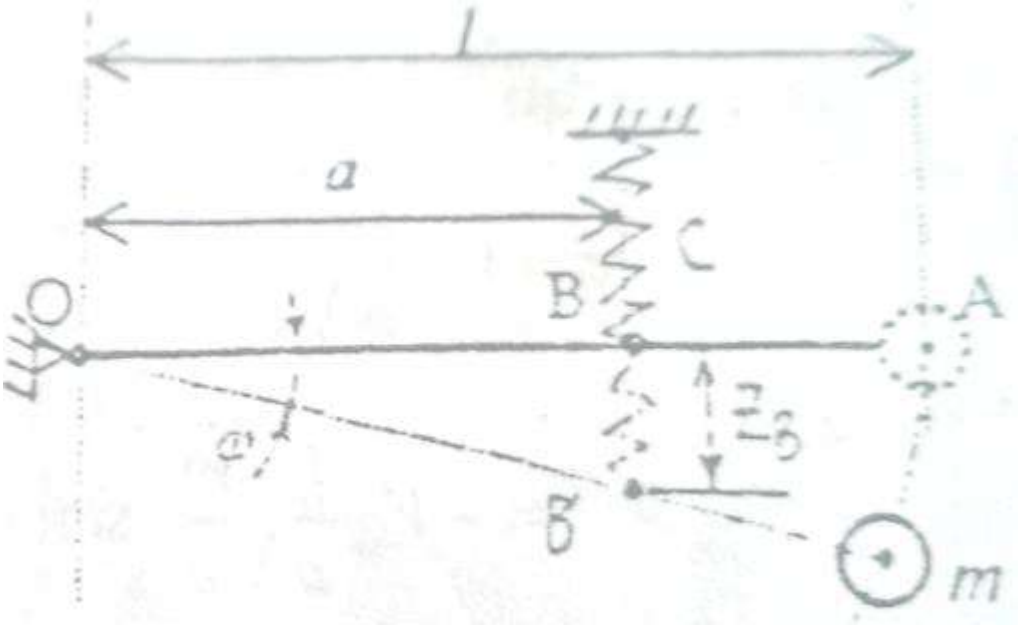
35):

$$z = \sqrt{z_{t0}^2 + \left(\frac{v_{t0}}{\beta_0}\right)^2}\cos\left(\beta_0 t + arctg\frac{v_{t0}}{\beta_0 z_{t0}}\right) \quad (2\text{-}37)$$

Như vậy dao động tự do không có lực cản của hệ một bậc tự do là một dao động điều hòa với tần số vóng tính theo (2-31) còn biên độ và góc lệch pha phụ thuộc vào điều kiện ban đầu tính theo (2- 36).

a. ***Ví dụ***:

Xét dao động của vật thể (hình 2.16) có khối lượng m gắn trên đầu thanh OA dài L [m], có thể quay quanh chốt 0 cố định và treo trên lò xo có độ cứng C [N/m] tại điểm B, biết OB= a [m].



Hình 2.16 – Mô hình dao động của vật thể m

Ta có thể giải bài toán theo nhiều cách.

<u>Cách 1</u>: Xác định tọa độ của vật là góc quay φ của thanh OA xung quanh O. Khi đó:

- Mômen quán tính khối lượng của vật đối với tâm quay O là $J= ml^2$

- Độ cứng chống xoay của lò xo C là:

$$C_\varphi = C\,a^2$$

Chúng ta viết PTDĐ của hệ tương tự như (2-26):

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2}+C_\varphi\varphi=0$$

Thay các giá trị J và C_φ ta được:

$$ml^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}+C\,a^2\varphi=0$$

Ta viết ngay được dạng nghiệm giống (2-37):

$$\varphi=\varphi_0\cos(\beta_0 t+\theta_0)$$

Trong đó:

Tần số vòng tính theo (2-31)

$$\beta_0=\sqrt{\frac{C_\varphi}{j}}=\frac{a}{l}\sqrt{\frac{C}{m}}$$

Biên độ φ_0 và góc lệch pha θ_0 xác định dựa vào các điều kiện ban đầu:

Giả sử tại t=0 , $\varphi_{t0}=0$ và $\dot{\varphi}=V_{t0}$

Theo (2-36c) ta có:

$$\varphi_0=\sqrt{0+\left(\frac{V_{t0}}{\beta_0}\right)^2}=\frac{V_{t0}}{\beta_0}=V_{t0}\frac{l}{a}\sqrt{\frac{m}{c}}$$

Và $\theta=arctg\frac{V_{t0}}{\beta_0\varphi_{t0}}=arctg(\infty)=\frac{\pi}{2}$

Như vậy qui luật dao động của vật là:

$$\varphi=V_{t0}\frac{l}{a}\sqrt{\frac{m}{c}}\cos\left(\frac{a}{l}\sqrt{\frac{C}{m}}t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-V_{to}\frac{l}{a}\sqrt{\frac{m}{c}}\cos\left(\frac{a}{l}\sqrt{\frac{c}{m}}t\right)$$

Cách 2: Ta có thể qui đổi khối lượng m về đặt tại điểm B và xét chuyển vị của hệ là chuyển vị đường z_B dọc theo trục của lo xo có độ cứng C.

Khi vật di chuyển một góc quay φ thì đầu B của lò xo có chuyển vị là

$Z_B = a\varphi$

Khối lượng qui đổi của vật đặt tại điểm B là: $m_B = m\frac{l^2}{a^2}$

Ta viết được PTDĐ đối với khối lượng qui đổi theo (2-26):

$$m_B\frac{d^2Z_B}{dt^2} + CZ_B = 0$$

Phương trình này có nghiệm theo (2-37) là:

$$Z_B = Z_{0B}\cos(\beta_0 t + \Psi_0)$$

Trong đó:

- Biên độ $Z_{OB} = a\varphi_0$
- Tần số $\beta_0 = \sqrt{\frac{C}{m_B}} = \frac{a}{l}\sqrt{\frac{C}{m}}$
- Giá trị của biên độ và góc lệch pha có thể xác định từ điều kiện ban đầu:

Tại thời điểm t=0; $\varphi = 0$ Suy ra $Z_B = a\varphi = 0$

$\dot{\varphi} = V_{t0}$ suy ra $\dot{z} = a\dot{\varphi} = aV_{t0}$

Do đó

$$Z_{0B} = \sqrt{0 + \left(\frac{aV_{t0}}{\beta_0}\right)^2} = \frac{aV_{t0}}{\beta_0} = V_{t0}l\sqrt{\frac{m}{c}}$$

$$\Psi_0 = arctg(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

Qui luật dao động của vật là:

$Z_B = Z_{0B}\cos(\beta_0 t + \Psi_0)$

$$= V_{t0}l\sqrt{\frac{m}{c}}\cos\left(\frac{a}{l}\sqrt{\frac{C}{m}}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -V_{t0}l\sqrt{\frac{m}{c}}\sin\left(\frac{a}{l}\sqrt{\frac{C}{m}}t\right)$$

Trở lại biến cũ ta có:

$$\varphi = \frac{z_B}{a} = -\frac{V_{t0}l}{a}\sqrt{\frac{m}{c}}\sin\left(\frac{a}{l}\sqrt{\frac{C}{m}}t\right)$$

Cách 3: Đưa lò xo đến treo vào điểm A thì độ cứng của lò xo thay thế sẽ là: $C_A = \frac{a^2}{l^2}$. Bạn đọc có thể tự viết phương trình và giải ra kết quả.

III. DAO ĐỘNG TỰ DO CÓ LỰC CẢN CỦA HỆ 1 BẬC TỰ DO

Lực cản dao động được tạo thành khi trong hệ có các chi tiết như giảm chấn ma sát, giảm chấn thủy lực, hoặc các loại như sức cản không khí, sức cản do ma sát và các loại sức cản khác...Các sức cản này tiêu hao năng lượng và làm cho biên độ giảm dần, người ta gọi là dao động tắt dần.

1. TRƯỜNG HỢP TRONG HỆ CÓ SỨC CẢN MA SÁT KHÔ

Sức cản khô thường do các giảm chấn ma sát sinh ra. Lực cản trong trường hợp này là những lực ma sát có trị số là hằng số và chỉ phụ thuộc vào hướng của vận tốc:

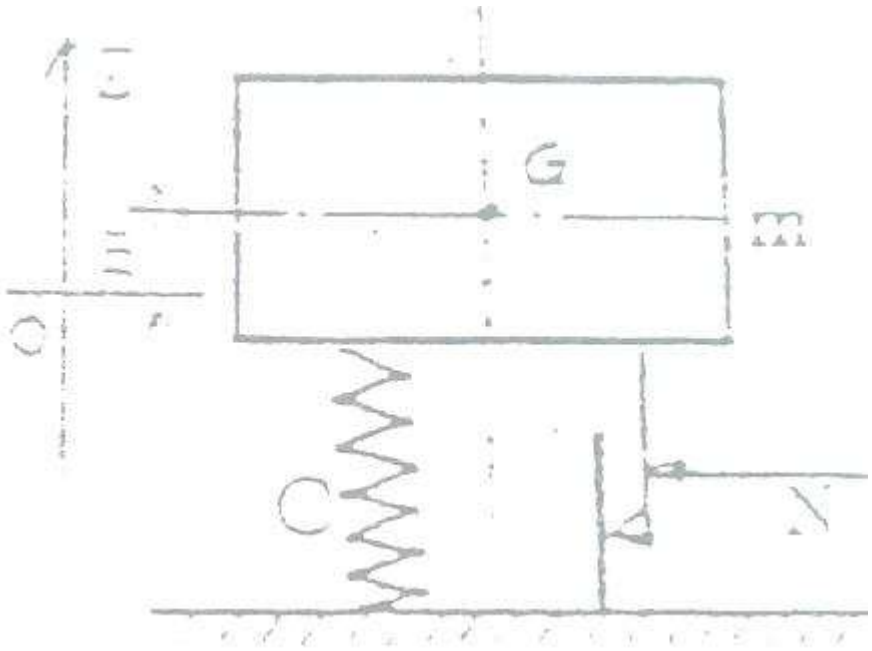
$$F_{ms} = \begin{cases} -\mu N & khi \ V > 0 \\ \mu N & khi \ V < 0 \end{cases} \qquad (2\text{-}38)$$

Trong đó:

- N: tổng lực ép trong các giảm chấn ma sát.
- μ: hệ số ma sát giữa các vật liệu làm giảm chấn.

a. ***Mô hình và phương trình dao động***:

Mô hình nghiên cứu dao động tự do trong trường hợp này như hình 2.17.



Hình 2.17- Mô hình dao động tự do khi có lực ma sát khô

Tương tự như phần trên, ta viết được phương trình cần bằng lực cũng chính là phương trình dao động:

$$\begin{cases} M\ddot{Z} + CZ - \mu N = 0 \; khi \; \dot{Z} < 0 \\ M\ddot{Z} + CZ + \mu N = 0 \; khi \; \dot{Z} > 0 \end{cases} \qquad (2\text{-}39)$$

Với ký hiệu $\beta = \sqrt{\frac{C}{M}}$ là tần số dao động tự do không có lực cản và $S = \frac{\mu N}{C}$ chuyển vị dưới tác dụng của lực ma sát. (2-40)

Ta có thể viết lại phương trình dao động (2-39) dưới dạng:

$$\frac{d^2(Z-S)}{dt^2} - \beta_0^2(Z-S) = 0 \quad \text{khi } \frac{dZ}{dt} < 0$$

$$\frac{d^2(Z-S)}{dt^2} - \beta_0^2(Z-S) = 0 \quad \text{khi } \frac{dZ}{dt} > 0$$

b. ***Dạng dao động và các thông số của dao động***

Nghiệm của các phương trình trên là:

$$\begin{cases} Z = A_1 \cos(\beta_0 t + \alpha_1) + S \; Khi \quad \dot{Z} < 0 \\ Z = A_2 \cos(\beta_0 t + \alpha_2) - S \; Khi \quad \dot{Z} > 0 \end{cases} \qquad (2\text{-}44)$$

Để xác định các hằng số trong biểu thức nghiệm ta cần biết điều kiện ban đầu.

Giả sử điều kiện ban đầu là: tại t=0 thì Z= Z_0 và $\dot{Z} = 0$ (2-45)

Ta khảo sát dao động theo từng nửa chu kỳ một, từ nửa chu kỳ thứ nhất đến nửa chu kỳ thứ k.

Trong nửa chu kỳ thứ nhất: Theo (2-44) quy luật của dao động là:

$$Z = A_1 \cos(\beta_0 t + \alpha_1) - S \qquad (2\text{-}46)$$

Từ đó:

$$\dot{Z} = -A_1 \beta_0 \sin(\beta_0 t + \alpha_1)$$

Thay điều kiện đầu vào 2 phương trình trên:

$$\begin{cases} Z_0 = A_1 \cos\alpha_1 - S \\ 0 = -A_1 \beta_0 \sin(\alpha_1) \end{cases}$$

Từ đó ta tính được: $\alpha_1 = 0$ *và* $A_1 = (Z_0 - S)$ (2-47)

Như vậy, quy luật dao động trong nửa chu kỳ thứ nhất là:

$$Z = (Z_0 - S)\cos(\beta_0 t) + S \qquad (2\text{-}48)$$

Từ biểu thức này ta xác định được các thông số của dao động tại thời điểm cuối cùng của nửa chu kỳ đầu đồng thời cũng là thời điểm đầu của nửa chu kỳ sau:

Đó là thời điểm $t_0 = \frac{\pi}{\beta_0}$

Tại đó: $Z = (Z_0 - S)\cos(\beta_0 t) + S = 2S - Z_0$ (a) (2-49)

Trong nửa chu kỳ thứ hai:

Theo (2-44) quy luật dao động là:

$$Z = A_2 \cos(\beta_0 t + \alpha_2) - S \qquad (2\text{-}50)$$

Từ đó:

$$\dot{Z} = -A_2 \beta_0 \sin(\beta_0 t + \alpha_2)$$

Thay các thông số tại thời điểm đầu (2-49) vào (2-50) ta được:

$$2S - Z_0 = A_2 \cos(\pi - \alpha) + S$$

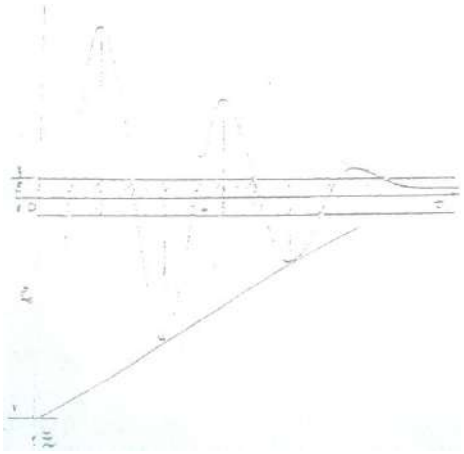
$$0 = -\beta_0 A_2 \sin(\pi - \alpha)$$

Suy ra: $\alpha_2 = 0,\ A_2 = (Z_0 - 3S)$ (2-51)

Vậy quy luật dao động trong nửa chu kỳ thứ hai là:

$$Z = (Z_0 - 3S)\cos\beta t - S$$ (2-52)

Tiếp tục tính như thế với nửa chu kỳ thứ 3, thứ 4…ta đi đến công thức tổng quát:



Hình 2.18- Dao động tự do giảm chấn ma sát

Trong nửa chu kỳ thứ k:

Quy luật dao động là:

$$Z = [Z_0 - (2k-1)S]\cos\beta_0 t - (2k-1)S$$ (2-53)

Với k= 1…k^{max}

Và dựa vào đó vẽ được đồ thị biến đổi của biên độ theo thời gian như hình 2.18.

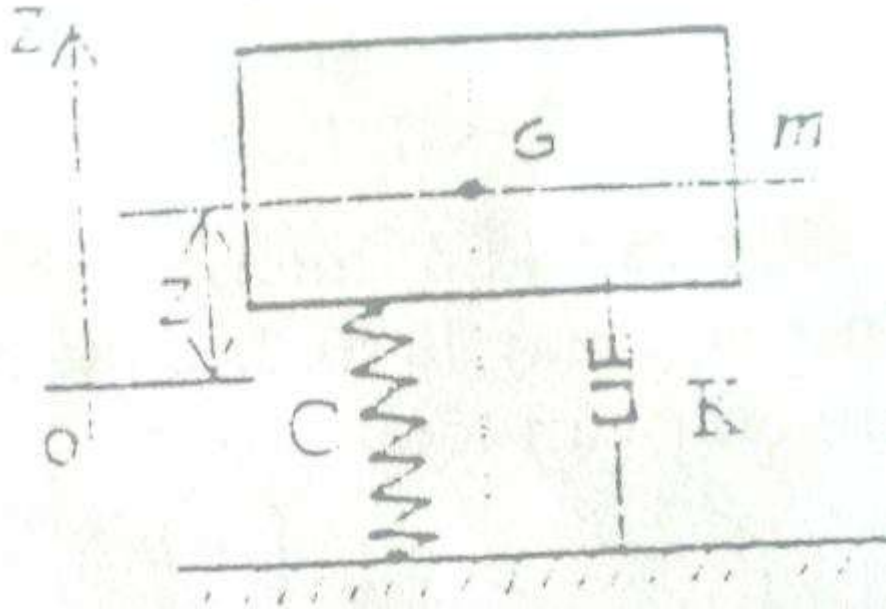
Ta nhận thấy, lực cản ma sát khô làm cho biên độ dao động tự do giảm theo đường thẳng, sau mỗi chu kỳ giảm một lượng bằng 4S, vì thế số nửa chu kỳ nhiều nhất thực hiện được là:

$$k^{max} < \frac{Z_0 - S}{2S}$$ (2-54)

2. TRƯỜNG HỢP TRONG HỆ CÓ SỨC CẢN NHỚT

Lực cản nhớt thường do các giảm chấn thủy lực sinh ra. Những lực cản này theo (2-14) thường tỷ lệ tuyến tính với tốc độ:

$$F = K\frac{dZ}{dt} = K\dot{Z}$$



Hình 2.19- Mô hình dao động tự do có lực cản nhớt

Với hệ số cản của giảm chấn K là hằng số.

a. ***Mô hình và phương trình dao động***

Mô hình hệ dao động tự do có lực cản như hình 2.19, phương trình dao động là:

$$m\frac{d^2Z}{dt^2} + K\frac{dZ}{dt} - CZ = 0 \qquad \text{(a)} \qquad \text{(2-55)}$$

Hay $m\ddot{Z} + K\dot{Z} - CZ = 0$ (b)

b. ***Dạng và các thông số của dao động***

Để biết dạng dao động ta tìm nghiệm phương trình (2-55) dưới dạng (2-27):

$$Z = Ae^{\lambda t}$$

Khi đó các đạo hàm của nó sẽ là:

$$\dot{Z} = \lambda A e^{\lambda t} = \lambda Z$$

Vaø $\ddot{Z} = \lambda^2 A e^{\lambda t} = \lambda^2 Z$

Thay vào phương trình (2-55) ta được:

$$(M\lambda^2 + K\lambda - C).Z = 0$$

Bởi vì Z không đồng nhất bằng không nên ta rút ra:

$$M\lambda^2 + K\lambda - C = 0 \qquad (2\text{-}56)$$

gọi là phương trình đặc trưng. Nghiệm của nó là:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{K}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{-K}{2M}\right)^2 - \frac{C}{M}}$$

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{(\alpha)^2 - \beta_0^2}$$

$$= \alpha \pm \beta_0 \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta_0}\right)^2 - 1}$$

$$= \alpha \pm \beta_0 \sqrt{D^2 - 1} \qquad (2\text{-}57)$$

Ở đây: $\alpha = -\frac{K}{2M}$ là *chỉ số mũ* của biến dạng dao động (2-58)

Và:

$\beta_0 = \sqrt{\frac{C}{m}}$ theo (2-31): gọi là *tần số vòng* dao động tự do không có cản.

$D = \frac{\alpha}{\beta_0} = \frac{-K}{2\sqrt{CM}}$ là *hệ số cản tương đối Lehr* của dao động (2-59).

Từ (2-57) chúng ta thấy các nghiệm λ_1, λ_2 của phương trình đặc trưng phụ thuộc vào trị số của D. Theo (2-59) D là một đại lượng không thứ nguyên phụ thuộc hệ số cản K của các giảm chấn nên gọi là *Hệ số cản tương đối Lehr* của dao động.

- Nếu $D \geq 1$ biểu thức dưới căn trong nghiệm (2-57) sẽ dương, λ_1, λ_2 sẽ là 2 nghiệm riêng biệt. Đây là những trường hợp sức cản lớn, dao động sẽ bị dập tắt nhanh chóng ngay từ khi chưa thực hiện được một chu kỳ như các đường 1,2,3

trong hình 2-20a. Những trường hợp này không có ý nghĩa trong việc nghiên cứu dao động.

- Nếu $D < 1$ biểu thức dưới căn trong (2-57) sẽ là một số âm, λ_1, λ_2 sẽ là 2 nghiệm phức liên hợp.

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta_0\sqrt{1-D^2} = \alpha \pm j\beta$$

Trong đó:

$\beta = \beta_0\sqrt{1-D^2}$:là tần số vòng dao động tự do có lực cản. (2-60)

Đây là các trường hợp sức cản nhỏ dao động thực hiện được một số chu kỳ rồi tắt dần như các đường 4,5,6 trong hình 2-20b.

Nghiệm của phương trình (2-55) biểu diễn dao động tự do có lực cản là:

$$Z = A_1 e^{\lambda 1 t} + A_2 e^{\lambda 2 t}$$

$$= e^{\alpha t}\left(A_1 e^{j\beta t} + A_2 e^{-j\beta t}\right)$$

Trong đó: A_1, A_2 là các hằng số phụ thuộc điều kiện đầu.

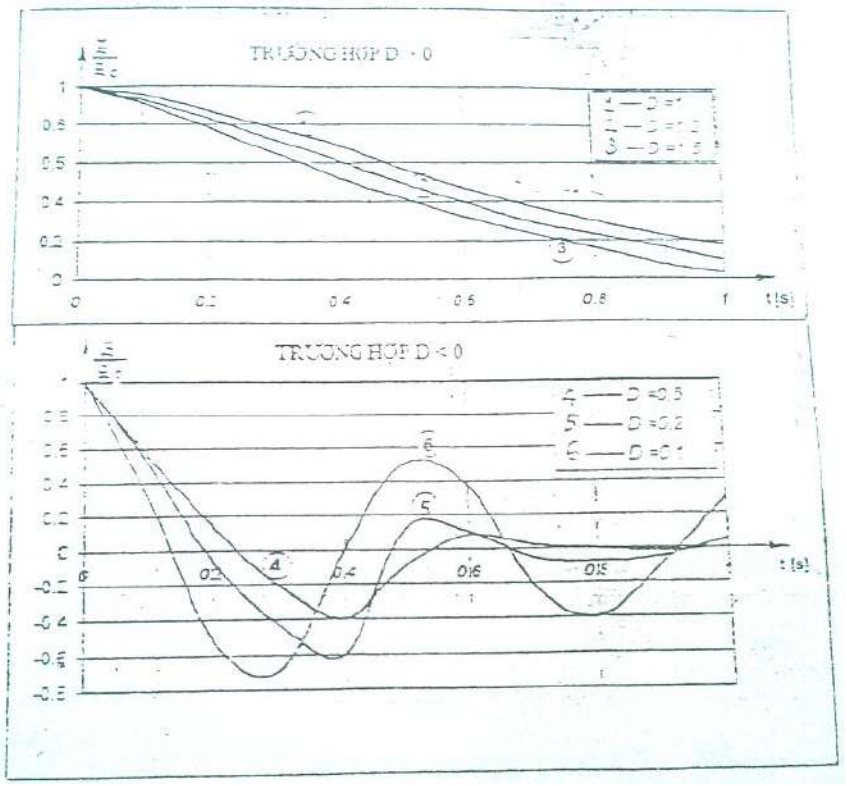
Biến đổi phần trong ngoặc tương tự như đối với (2-32), ta được công thức tính nghiệm trong trường hợp dao động tự do có lực cản là:

$$Z = e^{\alpha t}(A\cos\beta t + j\beta \sin\beta t)$$

$$= e^{\alpha t}\sqrt{A^2 + B^2}\, e^{j(\beta t+\varphi)}$$

$$= e^{\alpha t} Z_0 \qquad (2\text{-}61)$$

Ở đây, cũng như phần trên $A_1, A_2, Z_0, A, B, \varphi$ là những hằng số có thể xác định được từ những điều kiện đầu theo công thức (2-36).



Hình 2.20- Ảnh hưởng của hệ số D đến biên độ dao động

Từ đó có thể viết lại công thức nghiệm (2-61) khi biết điều kiện đầu:

$$Z = e^{\alpha t}\sqrt{Z_{t0}^2 + \frac{V_{t0}^2}{\beta^2}}\cos\left(\beta t + arctg\,\frac{V_{t0}}{\beta Z_{t0}}\right)$$

Như vậy, dao động tự do trong trường hợp có sức cản nhớt là *một dao động họ hình sin* với:

- Biên độ biến đổi theo thời gian tính theo điều kiện đầu là:

$$e^{\alpha t}Z_0 = e^{\alpha t}\sqrt{A^2 + B^2} = e^{\alpha t}\sqrt{Z_{t0}^2 + \left(\frac{V_{t0}}{\beta}\right)^2} \qquad (2\text{-}62)$$

* Tần số vòng phụ thuộc vào hệ số cản tương đối D tính theo (2-59)

$$\beta = \beta_0\sqrt{D^2 - 1}$$

* Góc lệch pha tính theo (2-36d)

$$\theta = -arctg\,\frac{V_{t0}}{\beta Z_{t0}}$$

IV. ẢNH HƯỞNG CỦA LỰC CẢN ĐẾN BIÊN ĐỘ VÀ TẦN SỐ DAO ĐỘNG TỰ DO

1. ẢNH HƯỞNG CỦA LỰC CẢN ĐẾN BIÊN ĐỘ DAO ĐỘNG

Như chúng ta đã biết từ công thức (2-62): biên độ của dao động có lực cản thay đổi theo hàm số $e^{\alpha t}$ mà chỉ số $\alpha = \frac{-K}{2M}$ lại phụ thuộc vào hệ số cản K.

Tùy theo trị số của α, có 3 trường hợp xảy ra:

* $\alpha = 0$ - ***Dao động điều hòa***

Đây là trường hợp K=0 cũng có nghĩa hệ dao động sẽ không có lực cản, từ đó ta có thể gặp lại các kết quả đã thu được ở phần trên:

- Hệ số cản tương đối D= $\frac{-K}{2\sqrt{CM}} = 0$ (2-63)

- Thay vào (2-59) ta tìm được tần số dao động tự do không cản giống như ta thấy ở (2-31):

$$\beta = \beta_0 = \sqrt{\frac{C}{M}} = \sqrt{\frac{C}{P/g}} = \sqrt{\frac{g}{P/C}} = \sqrt{\frac{g}{f_1}} \quad (2\text{-}64)$$

Với:

P: trọng lượng bộ phân trên lò xo.

g= 9.8 (m/s^2) là gia tốc trọng trường.

f_1: Là độ nhún tĩnh của hệ thống trên lò xo.

- Chu kì dao động tự do không lực cản tính theo (1-4):

$$T = \frac{2\pi}{\beta_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{C}} \quad (2\text{-}65)$$

- Tần số: $f_0 = \frac{\beta_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{M}}$ (2-66)

Cũng từ α=0 suy ra $e^{\alpha t}$ = 1thay vào (2-62) sẽ được:

- Biên độ dao động trong trường hợp này giống như (2-36c):

$$Z = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{Z_{to}^2 + (\frac{V}{\beta_0})^2} = const \qquad (2\text{-}67)$$

Như vậy dao động tự do trong trường hợp không có lực cản là một dao dao động điều hoà có biên độ tính theo (2-67) và tần số tính theo (2-66).

- ***α < 0 Dao động tắt dần***:

Là trường hợp trong hệ có các giả chấn thuỷ lực với hệ số cản nhỏ.

Trong trường hợp này tham số $e^{\alpha t}$ giảm theo thời gian và do đó biên độ dao động cũng giảm theo thời gian. Ta nói: Dao động tắt dần.

Khi đó:

- Dạng dao động tính theo: $Z = e^{\alpha t} Z_0 e^{j(\beta t + \theta)}$
- Tần số vòng tính theo (2-59): $\beta = \beta_0 \sqrt{1 - D^2}$
- Tần số: $f = \frac{\beta}{2\pi} = \frac{\beta_0}{2\pi} = f_0 \sqrt{1 - D^2}$ (2-68)
- Chu kỳ: $T = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\beta\sqrt{1 - D^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - D^2}}$ (2-69)
- Biên độ giảm theo thời gian tính theo (2-62)
- $e^{\alpha t}\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{Z_{to}^2 + (\frac{V_{to}}{\beta})^2}$

Ảnh hưởng của lực cản tới biên độ của dao động tắt dần:

Xét 2 biên độ kề nhau của một dao động tắt dần (hình 2-21)

Tại thời điểm t_1:

$$Z_{01} = e^{\alpha t}\sqrt{A^2 - B^2}$$

Sau đó 1 chu kỳ, tại thời điểm $t_2 = t_1 + T = t_1 + \frac{2\pi}{\beta}$

$$Z_{02} = e^{\alpha(t+T)}\sqrt{A^2 - B^2}$$

Tỷ số biên độ kề nhau: $\frac{Z_{01}}{Z_{02}} = e^{-\lambda t} = e^{\frac{k2\pi}{2m\beta}} = e^{\frac{k2\pi}{2\pi\lambda}}$ là một tần số không phụ thuộc vào

thời gian, có nghĩa là cứ sau một chu kỳ biên độ sẽ giảm đi một số phần trăm nhất định.

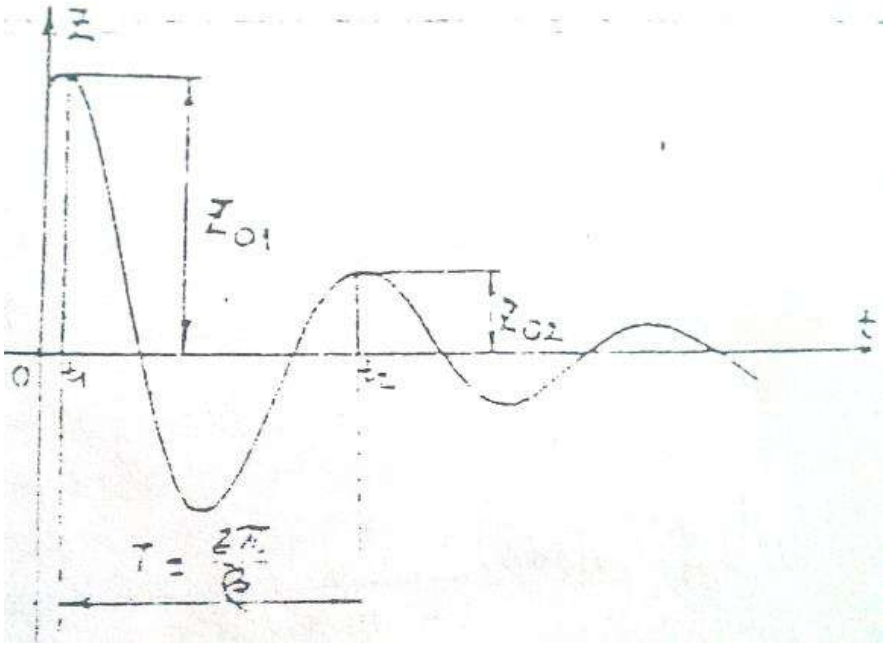
Người ta gọi: $\delta = \alpha T = \ln \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{K\pi}{m\beta}$ (2-70)

Là độ giảm loga hay tắt loga của biên độ.

Trong thực tế người ta thương đo độ giảm biên độ sau n chu kỳ và tính được:

$$\frac{Z_{\alpha 1}}{Z_{\alpha n}} = \frac{e^{\alpha t}}{e^{\alpha (t+nT)}} = e^{-\alpha nT}$$

Từ đó suy ra: $\delta = \alpha T = \frac{1}{n} \ln \frac{Z_t}{Z_{t+nT}}$



Hình 2.21- Ảnh hưởng của lực cản đến biên độ dao động.

Ví dụ: Một vật có khối lượng 0.2(Kg). Cứ 9 giây thì thực hiện được 10 dao động và cứ sau 10 dao động thì biên độ giảm đi một nửa. Hãy xác định hệ số cản trong dao động đó.

Giải: Từ điều kiện cứ 9 giây thì thực hiện được 10 dao động nên ta có

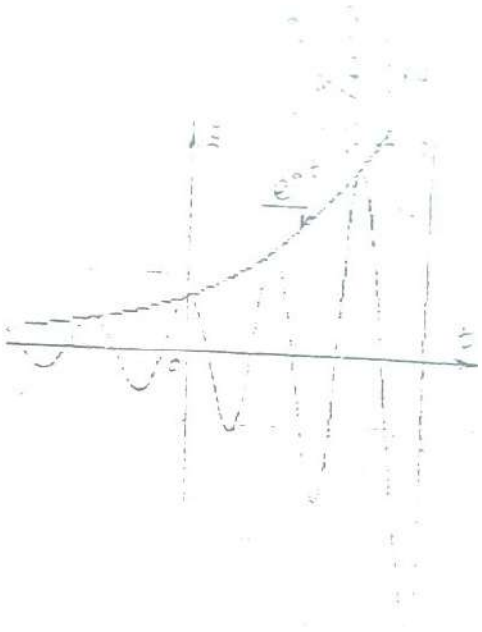
10T = 9 (s).

Tỉ số các biên độ: $\frac{Z_{11}}{Z_1} = 0.5 = e^{\frac{10K\pi}{m\beta}} = e^{\frac{10K\pi}{2m}} = e^{\frac{9K}{2m}}$

Lấy loga 2 vế $\ln 0.5 = -\frac{9K}{2m}$

Từ đó: K= -2mln(0,5)/9 = 2.0,2.ln0,5/9 = $31.4.10^3$ (Ns/m).

- α>0 Dao động không ổn định.



Hình 2.22 - Dao động không ổn định

Trường hợp này hàm số $e^{\alpha t}$ tăng theo thời gian, vì thế biên độ dao động cũng ngày càng tăng theo thời gian.

Ta nói dao động tự do không ổn định.

Như vậy dao động tự do sẽ không ổn định khi phần thực α của nghiệm phương trình đặc trưng có giá trị dương.

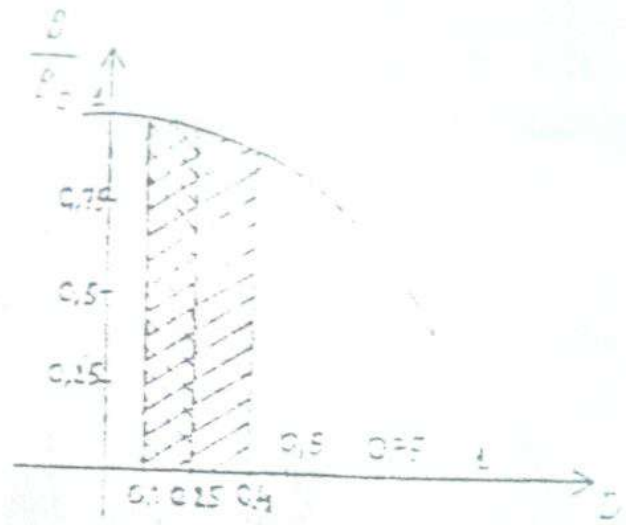
2. ẢNH HƯỞNG CỦA LỰC CẢN ĐẾN TẦN SỐ DAO ĐỘNG

Biến đổi công thức tính tần số vòng của dao động có lực cản (2-59) ta được:

$$(\frac{\beta}{\beta_0})^2 - D^2 = 1 \qquad (2\text{-}71)$$

Có nghĩa là có thể biểu diễn quan hệ giữa $\frac{\beta}{\beta_0}$ và D theo gốc ¼ thứ nhất của vòng

tròn đơn vị (2-23)



Hình 2.23 -Ảnh hưởng của lực cản đến tần số

Trong thực tế ta thường gặp những trường hợp sức cản nhỏ:

$0.1<D<0.25$

Tương ứng với:

$$\frac{\beta}{\beta_0} = 0.995 \div 0.969$$

Hay là: $\beta = (0.995 \div 0.969)\beta_0$

Có nghĩa là lực cản nhỏ làm cho tần số dao động giảm đi chút ít:

Trong tính toán khi $D < 0.4$ ta coi như:

$\beta \approx \beta_0$, $f \approx f_0$, $T \approx T_0$ (2-72)

Có thể bỏ qua các lực cản để tính toán được đơn giản hơn.

V. DAO DỘNG CƯỠNG BỨC CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

1. MÔ HÌNH VÀ PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG

Dao động cưỡng bức là dao động dưới tác dụng của lực kích thích bên ngoài.

Mô hình dao động như hình (2-2), phương trình dao động của nó như đã nói ở trên là phương trình vi phân cấp 2 không thuần nhất dạng (2-25):

$$m\ddot{Z} + K\dot{Z} + C.Z = F_0 \cos(\Omega t + \theta)$$

Ý nghĩa của các đại lượng có thể xem giải thích trong các công thức từ (2-21) đến (2-24). Để giải bài toán này ta vec tơ hoá bằng cách thêm vào vế phải một lượng ảo j. $F_0 \cos(\Omega t + \theta)$.

Khi đó Z trở thành vec tơ $\underline{Z}$ và phương trình dao động trở thành:

$$m\underline{\ddot{Z}} + K\underline{\dot{Z}} + C.\underline{Z} = F_0 e^{j(\Omega t + \theta)} \qquad (2\text{-}73)$$

2. DẠNG VÀ CÁC THÔNG SỐ CỦA DAO ĐỘNG

Ta tìm nghiệm riêng biểu diễn dao động cưỡng bức dưới dạng một dao động điều hoà có tần số vòng bằng tần số vòng của lực kích thích với biên độ Z_0 và góc lệch pha φ (chưa biết, cần xác định).

$$\underline{Z} = Z_0.e^{j(\Omega t + \varphi)} \qquad (2\text{-}74)$$

Khi đó các đạo hàm của nó:

$\dot{Z} = j\Omega Z \quad và \quad \ddot{Z} = -\Omega^2 Z$

Thay vào phương trình dao động (2-73) ta được:

$(-\Omega^2 m + j\Omega K + C)Z_0 e^{j(\Omega t + \varphi)} = F_0 e^{j(\Omega t + \theta)}$

Gọi $\frac{F_0}{C} = Z_t$ là biên độ tĩnh (2-75)

Nếu coi $Z_t.e^{j(\Omega t+\theta)}$ là dao động kích thích ta được tỷ số của dao động cưỡng bức (đầu ra) và dao động kích thích (đầu vào) là một số phức H gọi là hàm truyền:

$$H = \frac{Z_0.e^{j(\Omega t+\varphi)}}{Z_t.e^{j(\Omega t+\theta)}} = \frac{Z_0}{Z_t}.e^{j(\varphi-\theta)} = \frac{C}{C - \Omega^2 m + j\Omega K} = \frac{1}{1-\left(\frac{\Omega}{\beta_0}\right)^2 + j2D\left(\frac{\Omega}{\beta_0}\right)} \quad (a) \qquad (2\text{-}76)$$

Hay $H = \frac{Z_0}{Z_t} e^{j(\varphi-\theta)} = \frac{1}{1-\eta^2 + j2D\eta} = \gamma_t.e^{j\psi}$ (b)

Trong đó η là tỷ số các tầng số vòng $\frac{\Omega}{\beta_0} = \eta$ (2-77)

Từ biểu thức hàm truyền (2-76b) chúng ta tính được góc lệch pha của dao động:

$$\varphi = \theta - \psi = \theta - acrtg\frac{2D\eta}{1-\eta^2} \qquad (2\text{-}78)$$

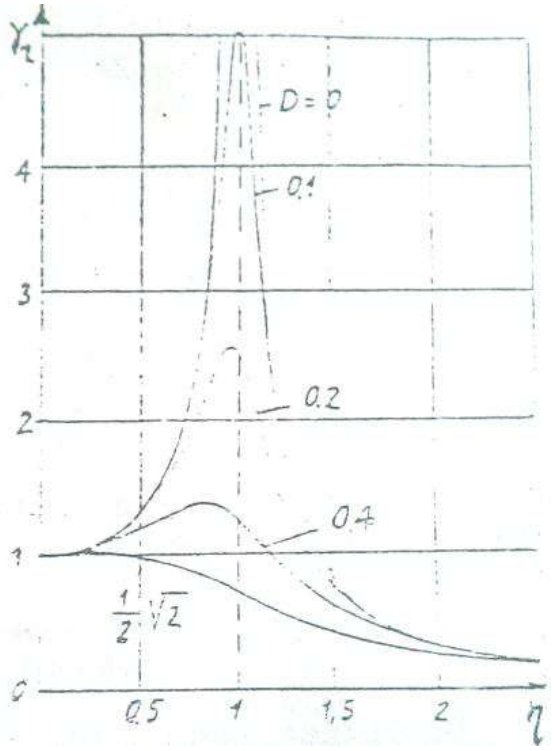
Và tỷ số độ lớn các biên độ dao động cưỡng bức và biên độ tĩnh gọi là hệ số khuyếch đại biên độ tĩnh:

$$\gamma_t = \frac{Z_0}{Z_t} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2.\eta^2}} \qquad (2\text{-}79)$$

Từ đó tính được biên độ dao động cững bức:

$$Z_0 = Z_t.\gamma_t = Z_t.\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2.\eta^2}} \qquad (2\text{-}80)$$

Chúng ta nhận thấy hệ số khuyếch đại biên độ tĩnh γ_t phụ thuộc tỷ số các tần số $\eta = \frac{\Omega}{\beta_0}$ và hệ số cản tương đối D (hình 2-24).



Hình 2.24- Hệ số khuyếch đại biên độ tĩnh.

Trị số lớn nhất của γ_t:

Đạt được khi:

$$\gamma_t^{Max} = \frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}} \qquad \text{(a)} \qquad (2\text{-}81)$$

$$\eta = \sqrt{1-2D^2} \qquad \text{(b)}$$

Khi đó biên độ sẽ tăng lên nhiều nhất, đó là lúc xẩy ra hiện tượng cộng hưởng.

Tại chỗ cộng hưởng, sự tăng biên độ lại phụ thuộc rất lớn vào hệ số cản D. Sức cản trong hệ càng lớn thì độ căng biên độ càng ít. Khi không có lực cản: D = 0, cộng hưởng sẽ xảy ra tại $\eta = 1$ có nghĩa là tần số dao động tự do β_0 bằng tần số dao động cưỡng bức Ω khi này biên độ có thể tăng đến vô cùng.

Như vậy biên độ cưỡng bức theo nghiệm (2-74) là một dao động điều hoà:

$$\underline{Z} = Z_0.e^{j(\Omega t+\varphi)}$$

Có cùng tần số Ω với lực kích thích nhưng lệch pha một góc φ tính theo công thức (2-78), còn biên độ tính theo công thức (2-80):

$$Z = Z_0.\gamma_t = \frac{F_0}{C}\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 - 4D^2\eta^2}}$$

VI. HỆ SỐ KHUYẾCH ĐẠI BIÊN ĐỘ VÀ MỘT SỐ MÔ HÌNH THƯỜNG GẶP VỀ DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

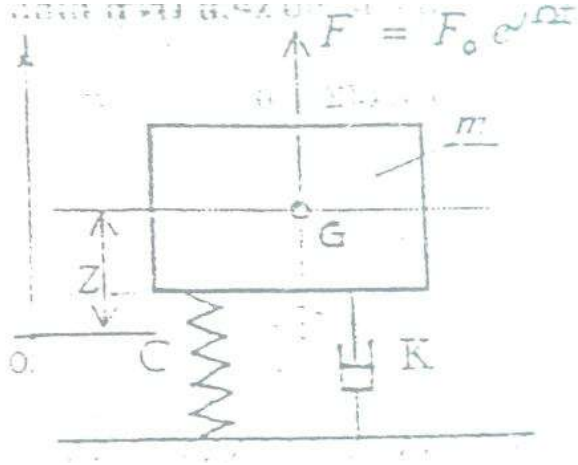
Trong một số bài toán người ta thường đưa các yếu tố kích thích dao động cưỡng bức về dạng dao động điều hoà có tần số Ω như vậy dao động cưỡng bức là dao động điều hoà có cùng tần số với dao động kích thích nhưng biên độ của nó được thay đổi γ lần:

$$Z_b^{Out} = \gamma.Z_b^{In}$$

γ gọi là hệ số khuyếch đại biên độ của dao động. Sau đây ta tính hệ số γ qua một số mô hình thường gặp trong các bài toán kỹ thuật.

1. MÔ HÌNH 1

Là mô hình chúng ta vừa xét ở tiết trước, đặc điểm của nó là lực kích thích điều hoà tác dụng trực tiếp vào trọng tâm của vật, hình 2.25.



Hình 2.25- Mô hình 1

Phương trình dao động có dạng (2-73):

$$m.\ddot{\underline{Z}} + K\dot{\underline{Z}} + C\underline{Z} = F_0.e^{j\Omega t}$$

Để có thể thay thế tác dụng của lực kích thích bằng một dao động điều hoà ta chia 2 vế phương trình dao động (2-73) cho m đồng thời nhân tử số và mẫu số của vế phải với C:

$$\ddot{Z} + \frac{K}{m}\dot{Z} + \frac{C}{m}Z = \frac{C}{m}\frac{F}{C}e^{j\Omega t}$$

Với những ký hiệu quan thuộc ta có thể viết phương trình này một cách gọn hơn trong một dạng phương trình chứa các thông số chủ yếu của dao động:

$$\ddot{Z} + 2\alpha_1\dot{Z} + \beta_1^2 Z = \beta_1^2 Z_t.e^{j\Omega t} \qquad \text{(2-82a)}$$

Trong dạng phương trình này nế coi $Z_t.e^{j\Omega t}$ dao động kích thích thì vế phải sẽ chứa tích của dao động này với bình phương tần số vòng của dao động tự do.

Nghiệm riêng của phương trình này là (2-74) cho biết dao động cưỡng bức là một dao động điều hoà có tần số bằng tần số của lực kích thích và biên độ là Z_{01}:

$$\underline{Z} = Z_{01}.e^{j(\Omega t+\varphi)}$$

Nếu coi đầu vào của hệ là dao động kích thích điều hoà có biên độ:

$$Z = Z_t.e^{j\Omega t} \qquad (2\text{-}83a)$$

Thì đầu ra của hệ là dao động cưỡng bức cũng là dao động điều hoà có biên độ:

$$Z^{Out} = Z_{01} = \gamma_t.Z_1^{In} = \gamma_t \frac{F_0}{C} \qquad (2\text{-}84a)$$

Hệ số khuyếch đại biên độ γ_t của hệ chính là hệ số khuyếch đại biên độ tĩnh γ_t tính theo (2-78):

$$\gamma_t = \frac{Z_{01}}{Z_t} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta_1^2)^2 + 4D_1^2\eta_1^2}} \qquad (2\text{-}85a)$$

Và đồ thị của nó xem như hình 2-24.

Ở đây:

Theo (2-75): $$\eta_t = \frac{\Omega}{\beta_{01}} \qquad (2\text{-}86a)$$

Theo (2-31): $$\beta_{01} = \sqrt{\frac{C}{M}} \qquad (2\text{-}87a)$$

Theo (2-59): $$D_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_{01}} = \frac{-K}{2\sqrt{C.M}} \qquad (2\text{-}88a)$$

Theo (2-58): $$\alpha_1 = \frac{-K}{2M} \qquad (2\text{-}89a)$$

2. MÔ HÌNH 2

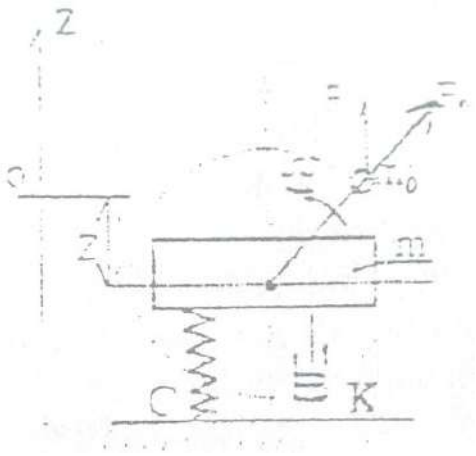
Kích thích bằng lực ly tâm.

Trong mô hình này (hình 2.26) vật bị kích thích bởi lực ly tâm do khối lượng mất cân bằng m_0 quay quanh trục vơi vận tốc Ω gây nên:

$$F_0 = m_0.r\,\Omega^2 \qquad (2\text{-}90)$$

Hình chiếu của lực ly tâm trên trục đứng là lực kích thích dao động theo phương đứng:

$$F = F_0.\sin\Omega t = m_0.\,\Omega^2.r\,\sin\Omega t \qquad (2\text{-}91)$$



Hình 2.26- Mô hình 2

Sau khi vec tơ hoá ta viết được phương trình dao động:

$$(m+m_0).\ddot{Z}+K.\dot{Z}+C.Z=m_0.\Omega^2.r.e^{j\Omega t} \quad (2\text{-}92)$$

Chia cả 2 vế cho m+m_0 ta được:

$$\ddot{Z}+\frac{K}{m+m_0}\dot{Z}+\frac{C}{m+m_0}Z=\Omega^2.\frac{m_0}{m+m_0}.r.e^{j\Omega t}$$

Ta nhân cả tử và mẫu số của 2 vế với β_{02}^2 để được dạng (2-82a):

$$\ddot{Z}+2\alpha_2.\dot{Z}+\beta_{02}^2Z=\beta_{02}^2\frac{\Omega^2}{\beta_{02}^2}.\frac{m_0}{m+m_0}.r.e^{j\Omega t} \quad (2\text{-}82b)$$

Thì tính được biên độ dao động cưỡng bước là:

$$Z_{02}=\gamma_1.\frac{\Omega^2}{\beta_{02}^2}\frac{m_0}{m+m_0}.r \quad (2\text{-}83b)$$

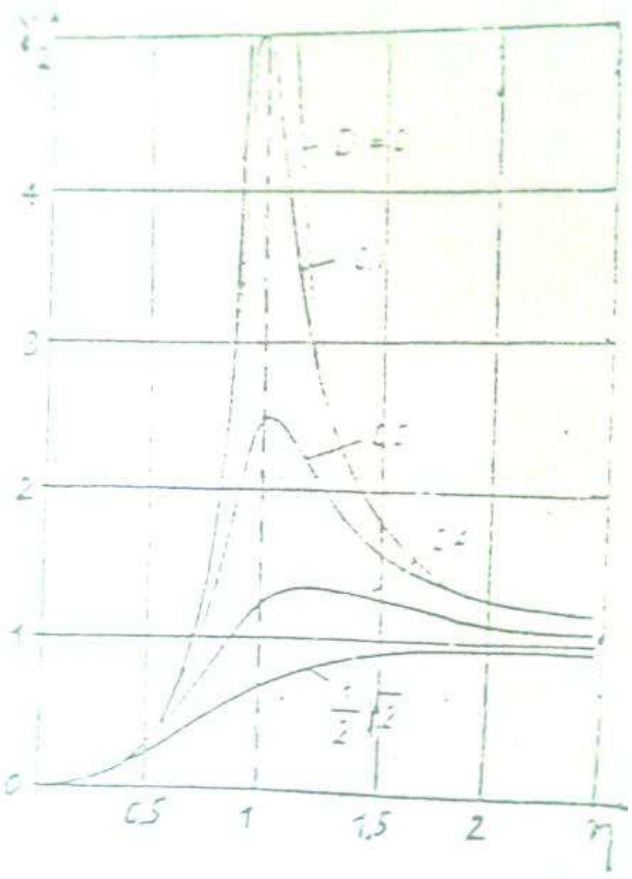
Nếu coi:

$$Z_2^{In}=\frac{m_0}{m+m_0}.r=Z_{kt2} \quad (2\text{-}84b)$$

Là biên độ của dao động kích thích, hệ số khuyếch đại biên độ dao đông γ_2 sẽ được tính theo công thức:

$$\gamma_2=\frac{Z_{02}}{Z_{kt2}}=\frac{1}{\sqrt{(1-\eta_2^2)^2+4D_2^2.\eta_2^2}}.\frac{\Omega^2}{\beta_{02}^2}=\gamma_1.\eta_2^2 \quad (2\text{-}85b)$$

Đồ thị của γ_2 phụ thuộc vào η_2 ứng với các trị số D khác nhau, xem trên hình 2-27.



Hình 2.27- Hệ số khuyếch đại γ_2

Ở đây $\eta_2 = \dfrac{\Omega}{\beta_{02}}$ (2-86b)

$$\beta_{02} = \sqrt{\frac{C}{m + m_0}} \quad (2\text{-}87b)$$

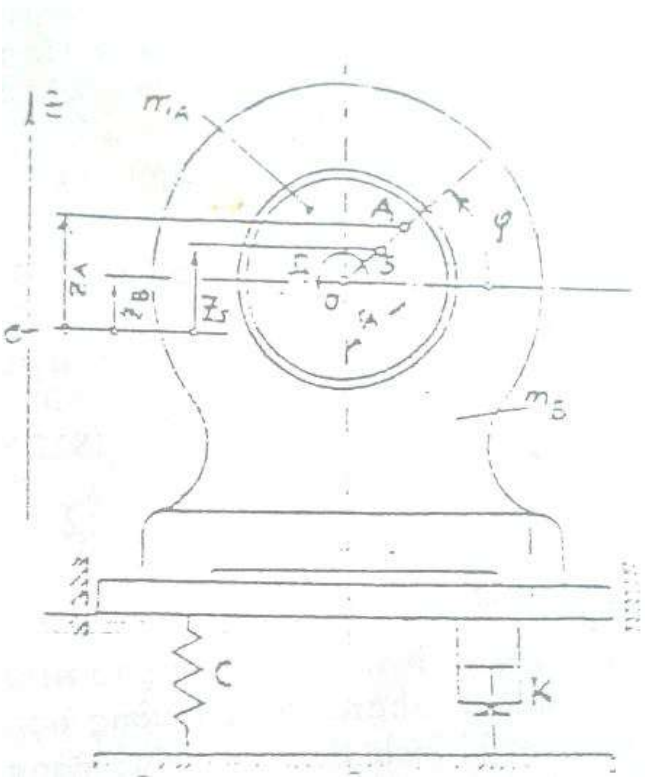
$$D_2 = \frac{\alpha_2}{\beta_{02}} = \frac{K}{2\sqrt{C(m + m_0)}} \quad (2\text{-}88b)$$

$$\alpha_2 = \frac{K}{2(m + m_0)} \quad (2\text{-}89b)$$

Bài toán ví dụ 1: Rôto của một động cơ điện có khối lượng m_A= 30 (Kg) đặt tại trọng tâm A cách tâm trục quay O một đoạn OA = r_A= 2 (mm) (hình 2.28).

Stato có khối lượng m_B= 90 (kg) đặt ở trụ quay O. Động cơ đặt trên đế đàn hồi có độ cứng C = 30 kN/m và hệ số giảm chấn K =0.5 kN.s/m. Đế bị hạn chế bởi khe trượt làm cho nó chỉ chuyển động được theo phương thẳng đứng Z.

Hãy viết phương trình dao động khi động cơ làm việc ở n = 200 v/p.



Hình 2.28 - Dao động của động cơ điện

Giải:

Lập một trục toạ độ thẳng đứng Z và xác định điểm gốc Z = 0. Trong đó toạ độ trọng tâm của Roto là Z_A và cuả Stato là Z_B.

Toạ độ trọng tâm của cả động cơ là Z_S sẽ được xác định từ điều kiện:

$(m_A + m_B).\ Z_s = m_A.Z_A + m_B.Z_B$ (*)

Từ hình 2-28 ta có : $Z_A = Z_B + r \sin\varphi$.

Nếu động cơ quay đều thì $\varphi = \Omega t$.

Thay vào (*) ta được : $(m_A + m_B).Z_s = m_A(Z_B + r \sin\varphi) + m_B Z_B$

$=(m_A + m_B) Z_B + m_A r \sin \Omega t$

Đạo hàm hai lần phương này và thay vào phương trình cân bằng lực của động cơ:

$(m_A + m_B)\ \ddot{Z} + K\dot{Z} + CZ = 0$

Ta được phương trình dao động :

$(m_A + m_B)\ \ddot{Z} + K\dot{Z} + CZ = m_A.\omega^2.r.\sin\Omega t$

Ta thấy phương trình dao động của nó có dạng giống như phương trình (2-92) của mô hình 2 nên với cách giải tương tự ta được nghiệm:

$$Z = Z_0 e^{j(\Omega t+\varphi)}$$

Thay số vào ta được :

$$\Omega = \frac{\pi.n}{30} = \frac{\pi.200}{30} = 20{,}93\,s^{-1}$$

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{C}{m_A + m_B}} = \sqrt{\frac{30000}{30+90}} = 15{,}81\,s^{-1}$$

$$\eta = \frac{\Omega}{\beta_0} = \frac{20{,}93}{15{,}81} = 1{,}324$$

$$\alpha = -\frac{K}{2(m_A + m_B)} = -\frac{500}{2.120} = -2{,}08\,s^{-1}$$

$$D = \frac{\alpha}{\beta_0} = \frac{-2{,}08}{15{,}81} = -0{,}131$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta_2^2)^2 + 4D_2^2.\eta_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-1{,}324^2)^2 + 4.0{,}131^2.1{,}324^2}} = 1{,}2$$

Hệ số khuyếch đại biên độ dao động:

$\gamma_2 = \gamma_1.\eta_2^2 = 1{,}2.1{,}324^2 = 2{,}1$

Biên độ dao động kích thích:

$$Z_{kt2} = r.\frac{m_A}{m_A + m_B} = 0{,}002.\frac{30}{30+90} = 0{,}0005\,m$$

Biên độ dao động cưỡng bức :

$Z_0 = \gamma_2.Z_{kt2} = 2{,}1.0{,}0005 = 0{,}00105$ m

Góc lệch pha của dao động cưỡng bức :

$$\varphi = -arctg\frac{2D\eta}{1-\eta^2} = -arctg\frac{2.0{,}131.1{,}324}{1-1{,}324^2} = -0{,}4317\,rad$$

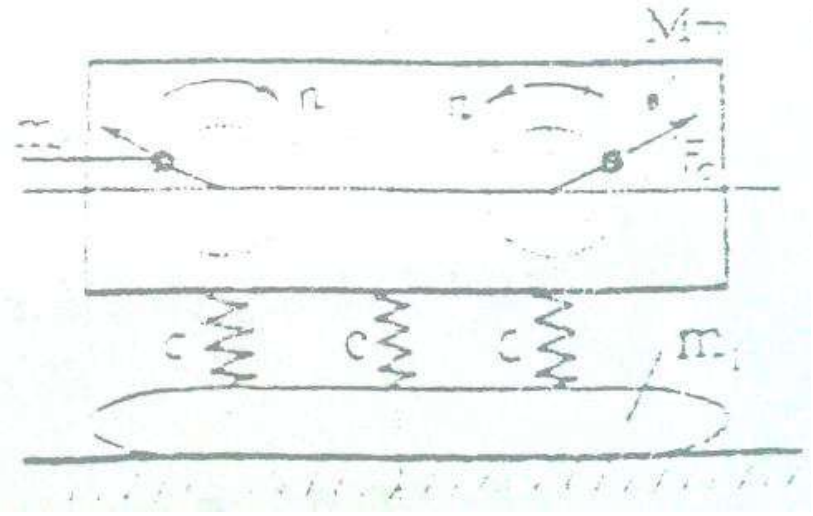
Vậy quy luật dao động của động cơ là ;

Z = 0,0001cos(20,93t – 0,4317) m

<u>Bài toán ví dụ 2</u>:

Một máy đầm đất (hình 3-29), có khối lượng bộ phận công tác M = 0,5 tấn đặt trên đế máy có khối lượng m_1 =120 kg thông qua 9 lò xo mỗi cái có độ cứng c = 20 kN/m. Máy được gây rung bằng hai khối lượng lệch tâm nằm trong bộ phận công tác quay ngược chiều nhau mỗi cái có khối lượng m_0 = 80 kg, bán kính tay quay r = 5cm và vòng quay n = 120 vòng/phút.

Tính lực nén lớn nhất của đầm khi làm việc và tính vòng quay để xảy ra cộng hưởng dao động .



Hình 2.29- Mô hình máy đầm dất

Giải :

Bài toán thuộc mô hình dao động kích thích bởi lực ly tâm.

Ta tính được :

- Khối lượng dao động M = 0,5 tấn = 500kg
- Độ cứng tổng của các lò xo C = $9.20.10^3$ = 180000N/m

- Tần số vòng dao động kích thích $\Omega = \frac{\pi.n}{30} = \frac{\pi.120}{30} = 4\pi\, s^{-1}$

- Lực ly tâm kích thích dao động là:

$F_0 = 2m_0.\Omega^2.r = 2.80.(4.\pi)^2.\ 0,05 = 1262$ N

Phương trình dao động là:

$$M\ddot{Z} + CZ = F_0.\cos\Omega t = 2m_0.\Omega^2.r.\cos\Omega t$$

Chia cả hai vế cho M ta được :

$$\ddot{Z} + \frac{C}{M}Z = \frac{2m_0}{M}.\Omega^2.r.\cos\Omega t$$

Hay viết dưới dạng (2-82a).

$$\ddot{Z} + \beta_{02}^2.Z = \beta_{02}^2.\frac{2m_0}{M}.\frac{\Omega^2}{\beta_{02}^2}.r.\cos\Omega t$$

Trong đó biên độ của dao động kích thích và:

$$Z_{kt2} = r.\frac{2m}{M} = 0,05.\frac{2.80}{500} = 0,016\,m$$

Tần số dao động tự do:

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{C}{M}} = \sqrt{\frac{180000}{500}} = 18,97\,s^{-1}$$

Tỉ số các tần số vòng:

$$\eta = \frac{\Omega}{\beta_0} = \frac{4\pi}{18,97} = 0,662$$

Vì trong hệ không có giảm chấn (D=0) nên hệ số khuyếch đại biên độ dao động γ_2:

$$\gamma_2 = \gamma_1.\eta_2^2 = \frac{1}{1-\eta^2}.\eta^2 = \frac{1}{1-0,662^2}.0,662^2 = 0,78$$

Biên độ dao động cưỡng bức như mô hình 2:

$Z_{02} = \gamma_2.Z_{kt2} = 0,78.0,016 = 0,0125$ m

Lực nén lớn nhất của đầm lên mặt đất:

$P_{max} = (M + m_1).\ G + Z_{02}.C = (\ 500+120).9,8 + 0,0125.180000 = 8326$ N

Từ điều kiện cộng hưởng dao động $\Omega = \beta_0 \rightarrow \frac{\pi.n}{30} = 18,97$

Ta tính được vòng quay tới hạn:

$$n = \frac{18,97.30}{\pi} = 181,24 \ v/p$$

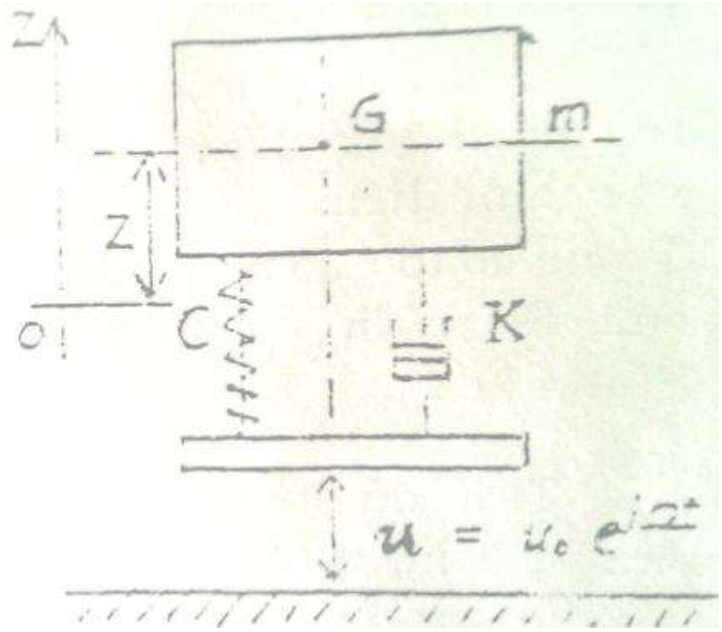
3. MÔ HÌNH 3

Kích thích động lực:

Mô hình dao động tương tự như mô hình 1, nhưng trong trường hợp này vật bị kích thích bởi dao động điều hoà:

$$u = u.e^{j\Omega t} \qquad (2\text{-}93)$$

của giá đở lò xo và giảm chấn như hình 2.30.



Hình 2.30-Mô hình 3

Ta viết được phương trình dao động:

$$m\ddot{Z} - K(\dot{Z} - \dot{u}) + C(Z - u) = 0$$

Hay $$m\ddot{Z} - K\dot{Z} - CZ = Cu + K\dot{u} \qquad (2\text{-}94)$$

Với $u = u.e^{j\Omega t}$

Ta tính được :

$$\dot{u} = j.\Omega.u = j.\Omega.u_0.e^{j\Omega t}$$

Và vế phải của (2.94):

$$\begin{aligned} Cu + K\dot{u} &= (C + j\Omega K).u_0.e^{j\Omega t} \\ &= C\left(1 + j\frac{K\Omega}{C}\right).u_0.e^{j\Omega t} \\ &= C(1 + j2D_3\eta_3).u_0.e^{j\Omega t} \\ &= C\sqrt{1 + 4D_3^2\eta_3^2}.u_0.e^{j(\Omega t+\theta)} \end{aligned} \qquad (2\text{-}95)$$

Trong đó:

$$\theta = arctg\frac{\Omega K}{C} = arctg(2D_3.\eta_3) \qquad (2\text{-}96)$$

Thay giá trị của vế phải vào (2-94) rồi chia cho m ta được:

$$\ddot{Z} + \frac{K}{m.}\dot{Z} + \frac{C}{m}Z = \frac{C}{m}.\sqrt{1 + 4D_3^2\eta_3^2}.u_0.e^{j(\Omega t+\theta)}$$

Hay viết dưới dạng (2-82a):

$$\ddot{Z} + 2\alpha_3\dot{Z} + \beta_{03}^2 Z = \beta_{03}^2.\sqrt{1 + 4D_3^2\eta_3^2}.u_0.e^{j(\Omega t+\theta)} \qquad (2\text{-}82c)$$

Thì biên độ dao động cưỡng bức :

$$Z_{03} = \gamma_t.\sqrt{1 + 4D_3^2\eta_3^2}.u_0 \qquad (2\text{-}83c)$$

Nếu coi :

$$Z_1^{in} = u_0 = Z_{kt3} \qquad (2\text{-}84c)$$

Là biên độ của dao động kích thích, thì hệ số khuyếch đại biên độ dao động γ_3:

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \frac{Z_{03}}{u} = \frac{\sqrt{1 + 4D_3^2.\eta_3^2}}{\sqrt{(1-\eta_3^2)^2 - 4D_3^2\eta_3^2}} \\ &= \gamma.\sqrt{1 + 4D_3^2\eta_3^2} \end{aligned} \qquad (2\text{-}85c)$$

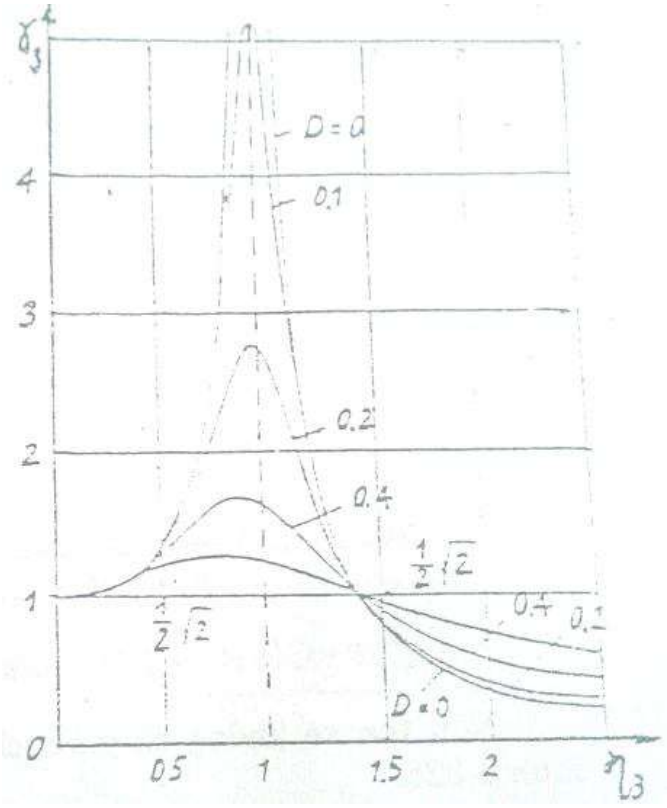
ở đây:

$$\gamma_3 = \frac{\Omega}{\beta_{03}} = \eta \qquad (2-86c)$$

$$\beta_{03} = \sqrt{\frac{C}{M}} = \beta_A \qquad (2-87c)$$

$$D_3 = \frac{\alpha_3}{\beta_{03}} = \frac{-K}{2\sqrt{CM}} = D_1 \qquad (2-88c)$$

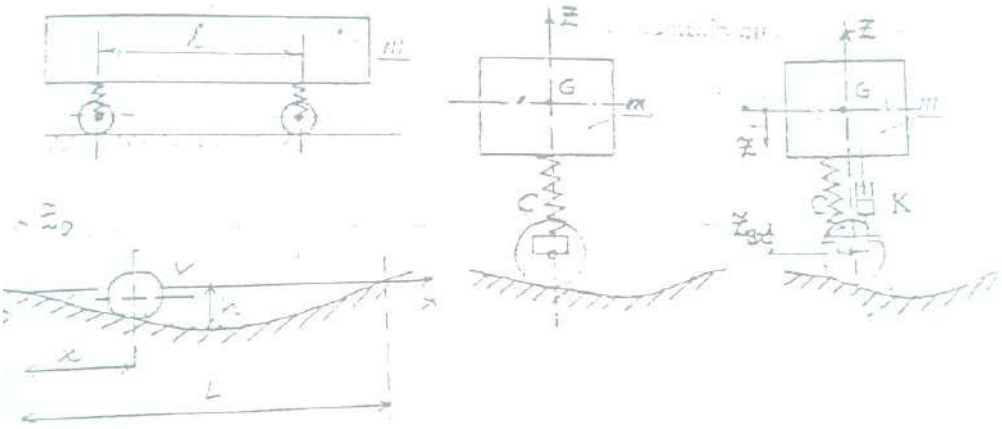
$$\alpha_3 = -\frac{K}{2M} = \alpha_1 \qquad (2-89c)$$



Hình 2.31- Hệ số khuyếch đại biên độ γ_3

Đồ thị γ_3 phụ thuộc η_3 ứng với các trị số của D_3 được vẽ trên hình (2.31)

Bài toán ví dụ 3: viết phương trình dao động thẳng đứng của toa xe hình (2-32) chạy với tốc độ V= 50 km/h trên đường sắt bằng những thanh ray có độ dài L= 12,5(m) biến dạng thành hình sóng có độ lồi lõm h = 20 (mm). Biết kối lượng trên lò xo là m= 15(tấn), hai trục bánh cách nhau một khoảng l =8,6 (m) , mỗi trục có hai lò xo độ cứng c= 300(kN/m) và 2 giảm chấn có hệ số cản k= 20 (kN/m).



Hình 2.32

a-Toa xe một hệ lò xo; b-Mô hình đường sắt

c- Mô hình toa xe không giảm chấn; d- Mô hình toa xe có giảm chấn

Giải:

Khi tính toán động lực học của các toa xe đường sắt, người ta thường mô hình hoá mặt đường sắt lát bằng những thanh ray bị biến dạng thành hình sóng biểu diễn bởi phương trình:

$$Z_{bx} = \frac{h}{2}\cos\frac{2\pi.X}{L}$$

Trong đó:

L là chiều dài một thanh ray, X là tọa độ dọc theo trục của đường.

Nếu tốc độ đều, thay X=V.t, ta được:

$$Z = \frac{h}{2}\cos\frac{2\pi V}{L}t = \frac{h}{2}\cos\Omega t$$

Với: $\Omega = \frac{2\pi V}{L} = \frac{2\pi}{12,5}\frac{50}{3,6} = 6,98\ (s)$

Nếu toa xe có giảm chấn thuỷ lực thì mô hình của nó như hình (2-32d).

Trong đó:

- Độ cứng lò xo trong mô hình bằng tổng độ cứng các lò xo của toa xe;

C = $\sum c_1$ =4. 300 = 1200 (kN/m)

- Hệ số cản của giảm chấn trong mô hình bằng tổng hệ số cản của các giảm chấn:

K = $\sum k_1$ =4. 20 =80 (kN.s/m)

- Quỹ đạo chuyển động của bánh xe giống như hình dạng của mặt đường và chính chuyển động này – tương tự như dao động u đế lò xo trong mô hình 3 – sẽ kích thích bộ phận trên lò xo dao động.

Tuy vậy bởi vì toa xe có 2 trục nên $Z_{bx} = \frac{Z_{b1} + Z_{b2}}{2}$ nếu chuyển động của trục bánh thứ nhất là: $Z_{bx} = \frac{h}{2} e^{j\Omega t}$ thì chuyển động của trục bánh thứ hai sẽ chậm sau một thời gian $\Delta t = \frac{l}{V}$:

$$Z_{bx} = \frac{h}{2} e^{j\Omega\left(t + \frac{l}{V}\right)} = \frac{h}{2} e^{j(\Omega t + \lambda)}$$

Với $\lambda = \frac{\pi . l}{L} = \frac{\pi . 8{,}56}{12{,}5} = 2{,}15 \ \ (rad)$

Ta tính được:

$$Z_{bx} = \frac{Z_{b1} + Z_{b2}}{2} = \frac{h}{2} \cos\lambda e^{j(\Omega t + \lambda)}$$
$$= 0{,}01 \cos 2{,}15 e^{j(\Omega t + \lambda)} = -0{,}005473 e^{j(\Omega t + \lambda)}$$

Khi đó phương trình dao động có dạng:

$$m\ddot{Z} + K(\dot{Z} - Z_{bx}) + C(Z - Z_{bx}) = 0$$

Hay $m\ddot{Z} + K\dot{Z} + CZ = CZ_{bx} + K\dot{Z}_{bx}$

Chia cả hai vế phương trình cho m ta được:

$$Z + 2\alpha Z + \beta_0^2 Z = \beta_0^2 \sqrt{1 + 4D^2\eta^2}\, \frac{h}{2} \cos\lambda . e^{j(\Omega t - \lambda - \varphi)}$$

Giống như phương trình dao động (2-82c) của mô hình 3.

Trong đó:

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{C}{M}} = \sqrt{\frac{1200}{15}} = 8{,}944 \ \ (s^{-1})$$

$$\eta = \frac{\Omega}{\beta_0} = \frac{6{,}98}{8{,}944} = 0{,}78$$

$$D = -\frac{K}{2\sqrt{CM}} = -\frac{80}{2\sqrt{1200.15}} = -0{,}298$$

$$2D\eta = 2.0{,}298.0{,}78 = 0{,}465$$

$$\varphi = arctg(2D\eta) = arctg\,0{,}465 = 0{,}435 \ \ rad$$

Phương trình này có nghiệm là:

$$Z = \sqrt{1+4D^2\eta^2}\,\frac{h}{2}\cos\lambda.e^{j(\Omega t-\lambda-\varphi-\theta)}$$

$$= \frac{h}{2}\cos\lambda\frac{\sqrt{1+4D^2\eta^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2}}\cos\lambda.e^{j(\Omega t-\lambda-\varphi-\theta)}$$

Thay số ta tính được :

$$\theta = arctg\frac{2D\eta}{1-\eta^2}\,arctg\frac{0{,}465}{1-0{,}78^2} = -0{,}87 \ \ rad$$

$$= 9{,}928\cos(6{,}98t - 1{,}715) \ \ \ mm$$

Nếu toa xe không có giảm chấn thuỷ kực thì mô hình của nó như hình 2-32c.

Phương trình dao động của thân toa xe là:

$$m\ddot{Z} + C(Z - Z_{bx}) = 0$$

Hay $m\ddot{Z} + CZ = CZ_{bx} = C\frac{h}{2}\cos\lambda e^{j(\Omega t-\lambda)}$

Chia cả hai vế cho m ta được phương trình dạng (2-82a) của mô hình 1 với K=0.

$$\ddot{Z} + \beta_{01}^2 Z = \beta_{01}^2\frac{h}{2}\cos\lambda e^{j(\Omega t-\lambda)}$$

Trong đó: $Z_{kt1} = \frac{h}{2}\cos\lambda$

Phương trình này có nghiệm là:

$$Z = Z_{01}.e^{j(\Omega t-\lambda-\varphi)}$$

Vì D=0:

$$Z_{01} = \frac{h}{2}\cos\lambda \frac{1}{(1-\eta^2)} = \frac{20}{2}\cos 2{,}15 \frac{1}{(1-0{,}78^2)} = 13{,}97 \quad (mm)$$

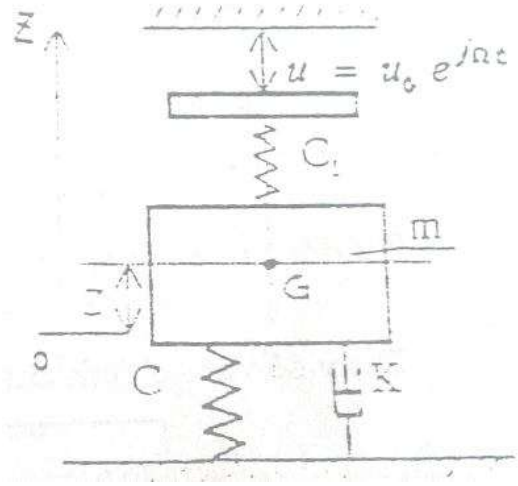
Và $\varphi = arctg\frac{2D\eta}{1-\eta^2} = arctg0 = 0$

Như vậy dao động cưỡng bức của toa xe có dạng dao động điều hoà

Z = 13,97.cos(4,18t – 2,15) (mm).

4. MÔ HÌNH 4

Kích thích thông qua lò xo được thể hiện trên hình 2-33.



Hình 2.33- Mô hình 4

Trong mô hình này vật thể có khối lượng m bị kích thích bởi dao động điều hoà: $u = u_0 e^{j\Omega t}$ của giá đở phía trên của lò xo độ cứng C.

Ta viết được phương trình dao động :

$$m\ddot{Z} + K\dot{Z} + CZ + C_1(Z-u) = 0$$

hay $$m\ddot{Z} + K\dot{Z} + (C+C_1)Z = C_1 u_0 . e^{j\Omega t} \qquad (2\text{-}97)$$

chia cả hai vế cho m đồng thời nhân và chia vế phải với (C + C_1) ta được:

$$\ddot{Z} + \frac{K}{m}\dot{Z} + \frac{C+C_1}{m}Z = \frac{C+C_1}{m}.\frac{C}{C+C_1}.u_0.e^{j\Omega t}$$

Hay viết dưới dạng (2-82a):

$$\ddot{Z} + 2\alpha_4 \dot{Z} + \beta_4^2 Z = \beta_4^2 . \frac{C_1}{C + C_1} . u_0 . e^{j\Omega t} \qquad (2\text{-}82d)$$

Biên độ dao động cưỡng bức là:

$$Z_{04} = \gamma_1 \frac{C_1}{C + C_1} . u_0 \qquad (2\text{-}83d)$$

Nếu coi biên độ kích thích là:

$$Z_4^{in} = \frac{C_1}{C + C_1} . u_0 = Z_{kt4} \qquad (2\text{-}84d)$$

thì hệ số khuyếch đại biên độ dao động γ_4 giống như γ_1:

$$\gamma_4 = \frac{Z_{04}}{Z_{kt4}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta_4^2)^2 + 4D_4^2\eta_4^2}} = \gamma_1 \qquad (2\text{-}85d)$$

Ở đây :

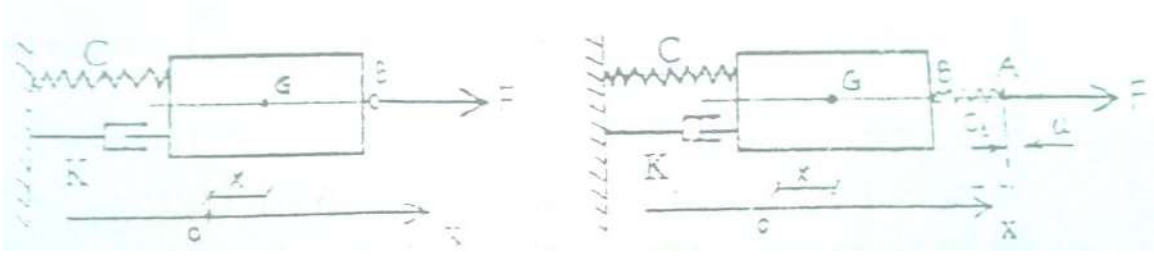
$$\eta_4 = \frac{\Omega}{\beta_{04}} \qquad (2-86d)$$

$$\beta_{04} = \sqrt{\frac{C + C_1}{M}} \qquad (2-87d)$$

$$D_4 = \frac{\alpha_4}{\beta_{04}} = \frac{-K}{2\sqrt{(C + C_1).M}} \qquad (2-88d)$$

$$\alpha_4 = -\frac{K}{2M} = \alpha_1 \qquad (2-98d)$$

Bài toán ví dụ 4: Xét mô hình dao động một bậc tự do của vật có khối lượng m = 10kg vẽ ở hình 2.34b biết C = 250 N/m, K = 20 Ns/m. Hãy xác định quy luật dao động của điểm A, nếu biết lực kích thích tác dụng vào nó thay đổi theo quy luật F = $F_0.\sin\Omega t = 10.\sin(2\pi t)$ N và C_1 = 350 N/m.



Hình 2.34

Giải: Mô hình này chính là mô hình 4 được đặt theo phương ngang.

- Nếu cho lực tác dụng trực tiếp vào điểm B của vật (hình 2-34a), ta viết được phương trình giống như mô hình 1.

$$m\ddot{X} - K\dot{X} - CX = F_0 \sin \Omega t$$

Nghiệm của phương trình này có dạng:

$X = X_0 \sin(\Omega t - \varphi)$.

Thay vào ta được:

$$\Omega = \frac{\pi.n}{30} = 20.93 \quad S^{-1}$$

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{C}{M}} = \sqrt{\frac{250}{10}} = 5 \quad S^{-1}$$

$$\alpha = -\frac{K}{2m} = \frac{20}{2.10} = -1 \quad S^{-1}$$

$$D = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{-1}{5} = -0{,}2 \quad S^{-1}$$

$$\eta = \frac{\Omega}{\beta} = \frac{2\pi}{5} = 1{,}256$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-1.256^2)^2 + 4.(-0.2)^2.1.256^2}} = 1{,}31$$

$$X_0 = \gamma_1 \frac{F_0}{C} = 1.31\frac{10}{250} = 0{,}05226 \quad (m)$$

$$\varphi = arctg\frac{2D\eta}{1-\eta^2} = arctg\frac{2.0.2.1.256}{1-1.256^2} = 0{,}716 \quad (rad)$$

- Trường hợp lực kích thích đặt vào điểm A thong qua một lò xo BA có độ cứng C_1 như hình 2.34b:
- Giả sử qui luật chuyển động của điểm là :

$U = X_0 \sin(\Omega t - \varphi)$.

Trong đó: u_0 và θ là những thông số chưa cần xác định.

Do lực tác dụng tại A bằng lực đàn hồi của lò xo C_1 ta có :

$C_1(X-u) = F_0 \sin \Omega t$

$C_1\{X_0\sin(\Omega t-\varphi) - X_0\sin(\Omega t-\varphi)\} = F_0 \sin \Omega t$

$$C_1\left[(X_0\cos\varphi - u_0\cos\theta)\sin\Omega t + (-X_0\sin\varphi - u_0\sin\theta)\cos\Omega t\right] = F_0\cos\Omega t$$

So sánh các hệ số của $\sin\Omega t$ và $\cos\Omega t$ ở 2 vế ta được:

$$C_1(X_0\cos\varphi - u_0\cos\theta) = F_0$$

$$(-X_0\sin\varphi - u_0\sin\theta) = 0$$

Từ 2 phương trình trên ta có:

$$u_0\cos\theta = X_0\cos\varphi - \frac{F_0}{C_1} \qquad \text{(a)}$$

$$u_0\sin\theta = X_0\sin\varphi \qquad \text{(b)}$$

Chia (b) cho (a) ta được:

$$tg\theta = \frac{X_0\sin\varphi}{X_0\cos\varphi - \frac{F_0}{C_1}}$$

Hay:

$$\theta = arctg\frac{X_0\sin\varphi}{X_0\cos\varphi - \frac{F_0}{C_1}} = arctg\frac{0{,}052\sin 0{,}716}{0{,}052.\cos 0{,}716 - \frac{10}{350}} = 1{,}2643$$

Bình phương cả 2 phương trình (a) và (b) rồi cộng từng vế với nhau:

$$u_0^2 = (X_0\sin\varphi)^2 - (X_0\cos\varphi - \frac{F_0}{C_1})^2$$

Từ đó :

$$u = \sqrt{(X_0\sin\varphi)^2 - (X_0\cos\varphi - \frac{F_0}{C_1})^2}$$

Thay số vào ta tính được:

$$u = \sqrt{(0{,}052\sin 0{,}716)^2 - (0{,}052\cos 0{,}716 - \frac{10}{350})^2} = 0{,}036$$

Vậy qui luật dao động tại điểm A là:

U =0.,036 sin (2π t – 1,256) m.

Ta cũng có thể giải bài toán bằng phương pháp vec tơ hóa:

Sau khi đã giải bài toán dao động ở bước 1 ta xác định được qui luậy chuyển động của vật khi không có lò xo C_1 là :

$X = X_0 \sin(\Omega t - \varphi) = X_0 e^{j(\Omega t - \varphi)}$.

Biết lực tác dụng tại A bằng lực đàn hồi của lò xo C_1 ta viết được :

$$C_1(X - u) = F_0 e^{j\Omega t}$$

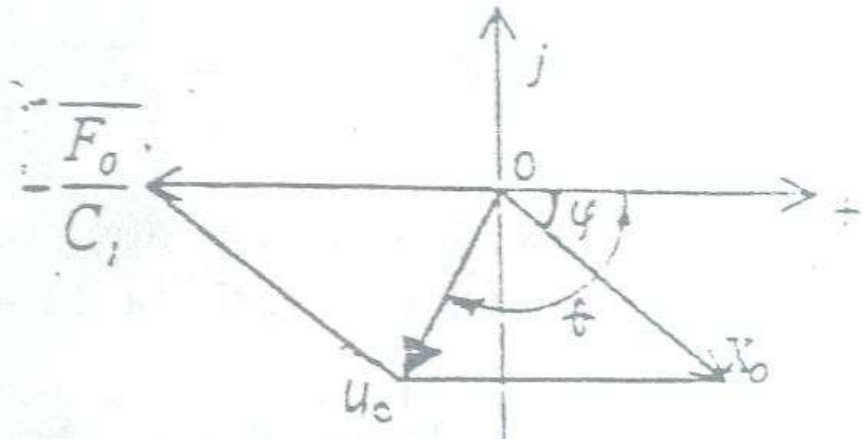
$$X_0 e^{j(\Omega t - \varphi)} - u_0 e^{j(\Omega t - \theta)} = \frac{F_0}{C} e^{j\Omega t}$$

Tại thời điểm t=0:

$$X_0 e^{-j\varphi} - u_0 e^{-j\theta} = \frac{F_0}{C}$$

Hay:

$$X_0 e^{-j\theta} = X_0 e^{-j\varphi} - \frac{F_0}{C} \qquad (*)$$



Hình 2.35

Hình 2.35 biểu diễn phương trình (*) từ đó ta xác định được u_0 và θ

Áp dụng công thức đối với véctơ tổng: $X_0 e^{-j\theta}$ *và* $-\frac{F_0}{C}$

Ta có:

$$u_0 = \sqrt{(X_0 \cos\varphi - \frac{F_0}{C})^2 + (X_0 \sin\varphi)^2}$$

$$tg\theta = \frac{X_0 \sin\varphi}{X_0 \cos\varphi - \frac{F_0}{C}}$$

- Tóm lại chúng ta đã xét 4 mô hình , trong mô hình thứ i biên độ dao động cưỡng bức được tính là:

$Z_i^1 = Z_{kt}^1 \gamma_t$

Trong đó:

Z_{kt} *và* γ_t lấy theo bảng sau:

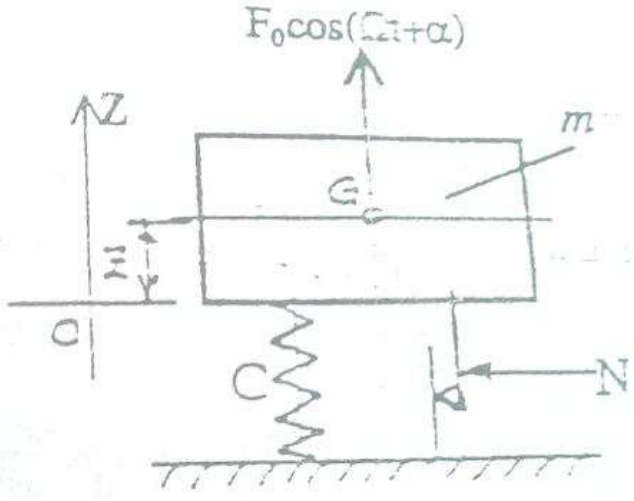
Mô Hình	Biên độ kích thích Z_{KT}	Hệ sô khuyếch đại dao động γ_t	α_1	β_0	D	η
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
I	$\frac{F_0}{C}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-\eta_1^2)^2 + 4D_1^2\eta_1^2}}$	$-\frac{K}{2m}$	$\sqrt{\frac{C}{M}}$	$\frac{-K}{2\sqrt{Cm}}$	$\frac{\Omega}{\beta_{01}}$
II	$r\frac{m_0}{m_1+m_0}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-\eta_2^2)^2 + 4D_2^2\eta_2^2}}\eta^2$	$-\frac{K}{2(m+m_0)}$	$\sqrt{\frac{C}{m+m_0}}$	$\frac{-K}{2\sqrt{C(m+m_0)}}$	$\frac{\Omega}{\beta_{02}}$
III	u_0	$\sqrt{\frac{1-4D_3^2\eta_3^2}{(1-\eta_3^2)^2 + 4D_3^2\eta_3^2}}$	α_1	β_{01}	D_1	η_1
IV	$u_0\frac{C_1}{C_1+C}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-\eta_4^2)^2 + 4D_4^2\eta_4^2}}$	α_1	$\sqrt{\frac{C_1+C}{m}}$	$\frac{-K}{2\sqrt{m(C_1+C)}}$	$\frac{\Omega}{\beta_{04}}$

VII. DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC KHI CÓ SỨC CẢN MA SÁT KHÔ

1. MÔ HÌNH VÀ PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG

Mô hình dao động cưỡng bức khi có sức cản ma sát khô như hình (2-36) tương tự như mô hình dao động tự do của nó ở hình (2-17) nhưng có thêm sự

tác dụng của lực kích thích diều hoà $F_0 \cos(\Omega t + \alpha)$ vào trọng tâm G.



Hình 2.36- Mô hình dao động cưỡng bức khi có lực cản ma sát khô

Phương trình dao động của nó tương tự như phương trình dao động tự do (2-42) nhưng vế phải có thêm lực kích thích:

$$\ddot{Z} + \beta_0{}^2 Z = -\frac{\mu N}{m}\sin(\dot{Z}\ ) + F_0 \cos(\Omega t + \alpha) \qquad (2\text{-}98)$$

2. DẠNG VÀ THÔNG SỐ CỦA DAO ĐỘNG

Nếu chúng ta giả thiết dao động cưỡng bức là một dao động điều hoà có tần số vòng bằng tần số vòng Ω của lực kích thích, lệch pha một góc φ với lực kích thích còn biên độ:

$$Z_0 = Z_t \gamma_t = \frac{F_0}{C}\frac{1}{1+\eta^2} \qquad (2\text{-}99)$$

Thì nghiệm tổng quát của phương trình trên trong nửa chu kỳ thứ nhất là:

$$Z = C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t + S + \frac{Z_t}{1+\eta^2}\cos(\Omega t + \varphi) \qquad (2\text{-}100)$$

Từ đó:

$$Z = -\beta_0 C_1 \sin\beta_0 t + \beta_0 C_2 \cos\beta_0 t - \Omega\frac{Z}{1-\eta^2}\sin(\Omega t + \varphi) \qquad (2\text{-}101)$$

Giả sử biết chuyển vị và vận tốc dao động tại thời điểm đầu và cuối của nửa chu kỳ thứ nhất:

Tại t = 0 thì $Z = Z_0$ và $\dot{Z} = 0$ (a) (2-102)

Tại t = $\frac{\pi}{\Omega}$ thì $Z = Z_0$ và $\dot{Z} = 0$ (b)

Khi đó:

$$\beta_0 t = \beta_0 \frac{\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{\eta} = \lambda \text{ và } \Omega t = \Omega \frac{\pi}{\Omega} = \pi \quad \text{(c)}$$

Thay điều kiện (a) vào phương trình (2-100) và (2-101) ta được :

$$Z_0 = C_1 + S + \frac{Z_t}{1-\eta^2}\cos\varphi \quad \text{(e)}$$

$$0 = \beta_0 C_2 - \Omega \frac{Z_t}{1-\eta^2}\sin\varphi \quad \text{(f)}$$

Thay điều kiện (b) vào phương trình (2-100) và (2-101) có lưu ý đến (c) ta được :

$$-Z_0 = C_1\cos\lambda + C_2\sin\lambda + S - \frac{Z_t}{1-\eta^2}\cos\varphi \quad \text{(g)}$$

$$0 = -\beta_0 C_1\sin\lambda + \beta_0 C_2\cos\lambda\Omega\frac{Z_t}{1-\eta^2}\sin\varphi \quad \text{(h)}$$

Cộng các phương trình (e) với (g) và (f) với (h) , ta được hệ sau:

$$C_0(1+\cos\lambda) + C_2\sin\lambda + 2S = 0 \quad \text{(i)}$$

$$\beta_0\left[C_2(1+\cos\lambda) + C_1\sin\lambda\right] = 0 \quad \text{(k)}$$

Giải hệ phương trình này được:

$$C_1 = -S$$

$$C_2 = -Stg\frac{\lambda}{2}$$

Thay các giá trị C_1 và C_2 vào hệ phương trình (e); (f) ta được:

$$Z_0 = \frac{Z_t}{1-\eta^2}\cos\alpha$$

$$-Stg\frac{\lambda}{2} = Z_t \frac{\eta}{1-\eta^2}\sin\alpha$$

Từ đó tính được biên độ:

$$Z_0 = \frac{1}{\left|1-\eta^2\right|}\sqrt{Z_t^2 - (S\frac{1-\eta^2}{\eta}tg\frac{\lambda}{2})^2} \qquad (2\text{-}103)$$

Như vậy biên độ dao động cũng phụ thuộc tỉ số các tần số vòng. Khi tỷ số này tiến tới 1 có nghĩa là $\Omega \to \beta_0$ do :

$$\lim\frac{1-\eta^2}{\eta}tg\frac{\lambda}{2} = \lim\frac{1-\eta^2}{\eta}tg\frac{\pi}{2\eta} = -\frac{4}{\pi}$$

Nên: $$Z_0 = \frac{1}{\left|1-\eta^2\right|}\sqrt{Z_t^2 - (\frac{4S}{\pi})^2} \qquad (2\text{-}104)$$

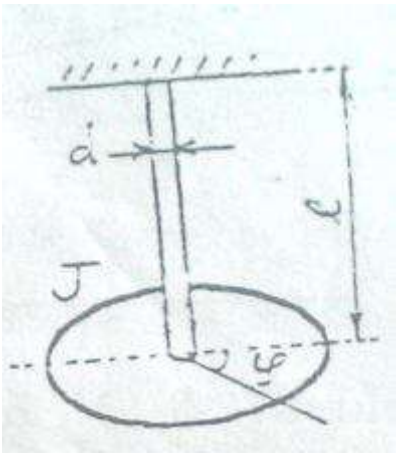
VIII. CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG II

1- Đối với mỗi loại:

- Dao động tự do không lực cản.
- Dao động tự do có lực cản.
- Dao động cưỡng bức.

+ Cần nắm vững:

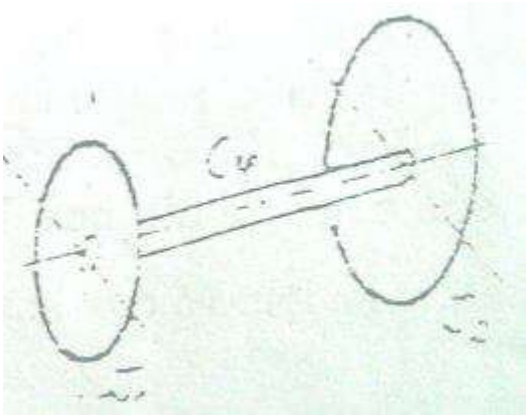
- Mô Hình
- Cách thành lập phương trình dao động.
- Dạng nghiệm.
- Công thức tính tần số, tần số vòng, chu kỳ biên độ, góc lệch pha.



Hình BT2.1

2- Ảnh hưởng của lực cản đến biên độ và tần số của:

- Dao động tự do.
- Dao động cưỡng bức.



Hình BT2.2

3- Đối với các trường hợp dao động có thể gây nguy hiểm trong kỹ thuật là:

- Cộng hưởng các dao động.
- Dao động tự do không ổn định cần nắm vững hiện tượng, điều kiện xẩy ra để tìm cách khắc phục.

Nắm vững các bài toán và mô hình thường gặp trong kỹ thuật và cách giải quyết các bài toán trên máy tính.

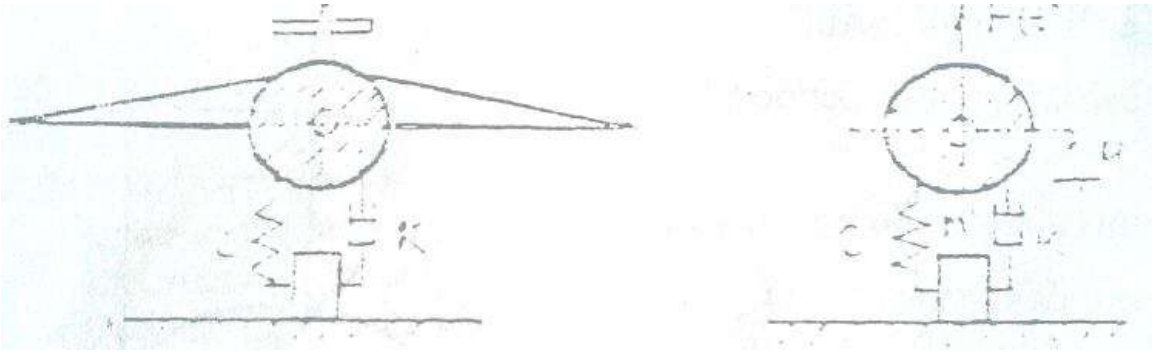
4- Xác định mômen quán tính J của đĩa (hình BT2-1) đối với trục quay,

biết trục có chiều dài l=2 m. đường kính d = 0.5 cm, chu kỳ dao động tự do T = 3,14 s, môđun trượt của thép G = 80.10^2 N/m^2.

5- Hai đĩa có momen quán tính J_1, J_2 được gắn chặt vào 2 đầu móc trục nằm ngang có độ cứng chống xoắn C_φ (Hình BT2-2). Viết phương trình dao động và xác định qui luật dao động tương đối của hai đĩa.

6- Mô hình cơ học của một máy bay hạ cánh bao gồm một khối lượng m đặt trên một lò xo có độ cứng C và một giảm chấn có hệ số cản K (hình BT2-3). Lực nâng khi hạ cánh cân bằng với trọng lượng, vận tốc hạ xuống V_2 = 2 m/s.

Sau khi hạ cánh máy bay bị hãm và lăn nhẹ trên đường băng.

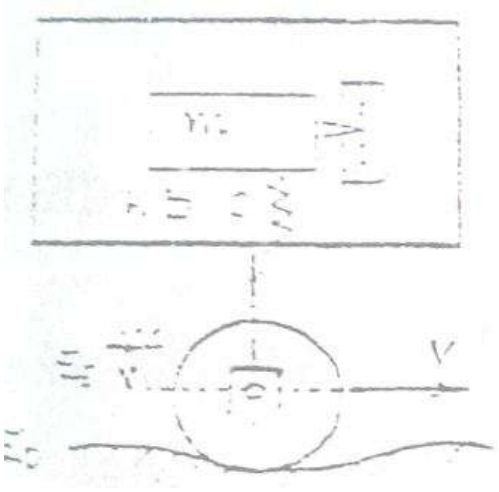


Hình BT2.3- Mô hình dao động của máy bay lúc hạ cánh.

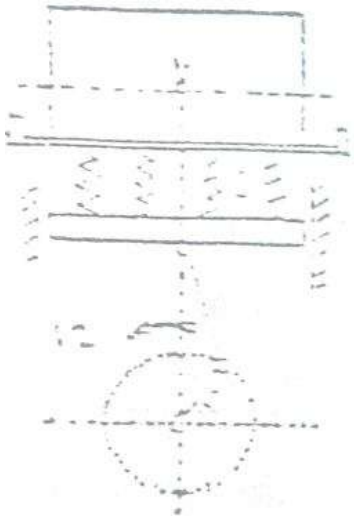
Viết phương trình dao động theo phương thẳng đứng của than máy bay u khi máy bay lăn trên đường bằng phẳng. Xác định tần số và gia tốc của dao động đó.

Biết: m = 10^3 kg. C=3 kN/m, K = 2,74 kNs/m.

7- Máy đo dao động (hình BT2.4), gồm một vật có khối lượng m = 0,1 (kg) đặt trên một lò xo có độ cứng C = 0,05 N/m và một giảm chấn có hệ số cản k = 0,08 Ns/m. Tìm chuyển động mà máy ghi được khi gắn trên ổ trục của bánh xe tầu hỏa (bầu dầu) khi tàu chạy với vận tốc V = 50 km/h. Trên đường lồi lõm có qui luật $Z_0 = 0{,}01\cos\frac{2\pi X}{12{,}5}$



Hình BT2.4 -Máy đo dao động



Hình BT2.5

8- Một bệ đúc có cấu kiện bê tong kiểu va dung (hình BT2.5), có trọng lượng trên lò xo (cả vật đúc) P = 5 tấn đặt trên 4 lò xo mỗi cái có độ cứng C = 20 kN/m được gây rung bằng cơ cấu lệch tâm có bán kính r = 5 mm và vòng quay n = 300 v/p.

- Viết phương trình dao động và tính biên độ dao động cưỡng bức khi làm việc.
- Tính vòng quay để vật đúc rung mạnh nhất.

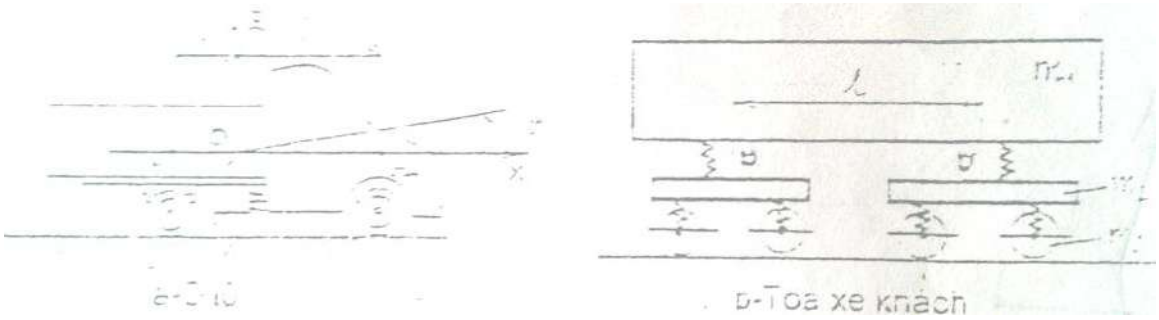
Chương 3 - DAO ĐỘNG CỦA HỆ NHIỀU BẬC TỰ DO

I. MÔ HÌNH CỦA HỆ NHIỀU BẬC TỰ DO VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN MÔ TẢ HỆ DAO ĐỘNG

1. MÔ HÌNH

Hệ nhiều bậc tự do có thể bao gồm một hay nhiều vật thể liên kết với nhau bằng các mối liên kết đàn hồi tạo nên bởi các lò xo và giảm chấn, mà khi chuyển động vị trí của các vật đó không thể xác định bằng một tọa độ suy rộng duy nhất. Khi ta kích thích vào môtj hoặc nhiều vật thể trong hệ thì hệ sẽ dao động.

Ví dụ 1: Một ôtô (hình 3.1) khi chạy trên đường không bằng phẳng, thân xe vưaf chuyển động theo phương thẳng đứng Z vừa quay quanh trục Y. Vị trí trọng tâm của nó tại một thời điểm t được xác định bằng 2 tọa độ z và c.



Hình 3.1. Ví dụ về hệ chiếu bậc tự do

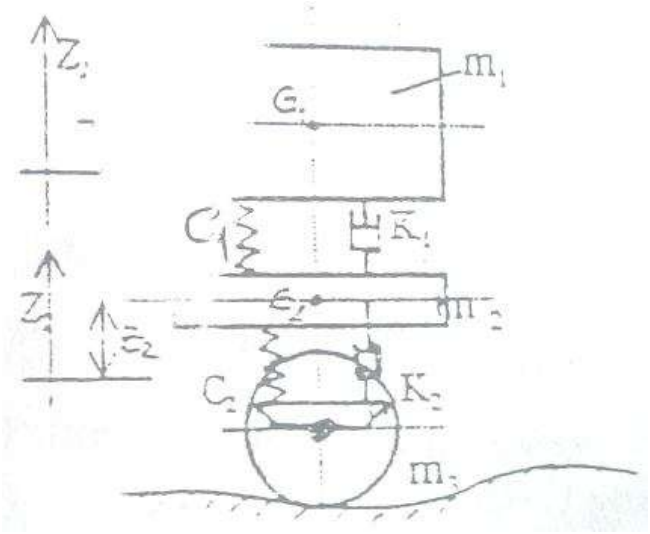
Ví dụ 2: Toa xe chở khách gồm có thân xe (khối lượng m_1), 2 khung giá chuyển hướng (khối lượng m_2) và 4 trục bánh xe (khối lượng m_3) liên hệ với nhau bằng các lò xo và giảm chấn như hình 3-1b. Khi đi qua các mối nối của đường ray lực xung kích tác dụng vào các bánh xe truyền qua các lò xo sẽ làm cho các khối lượng m_1 , m_2 dao động. Mô hình dao động của toa xe theo phương thẳng đứng được vẽ trên hình 3-2. Vị trí của hệ được xác định bằng các tọa độ Z_1, Z_2.

Khi các vật thể của hệ chuyển động, đối với mỗi vật thể theo mỗi tọa độ chúng ta có thể dựa vào nguyên lý D'alambert hoặc phương trình Lagrange loại II để viết phương trình vi phân mô tả dao động của nó.

2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN MÔ TẢ HỆ DAO ĐỘNG

Tất cả các phương trình đó hợp thành một hệ phương trình vi phân gọi là hệ phương trình dao động. Hệ phương trình này thường là hệ phương trình vi phân cấp II tuyến tính có hệ số hằng số có dạng ma trận là:

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{K}}\,\dot{\underline{q}} + \underline{\underline{C}}\,\underline{q} = \underline{F} \qquad (3\text{-}1)$$



Hình 3.2 Mô hình của xe khách

Trong đó:

$\underline{\underline{M}}$: Ma trận khối lượng nó là ma trận vuông cấp n mà các phần tử khác không có liên quan đến khối lượng m, hay mô men quán tính khối lượng J_1, của các vật thể trong hệ.

Trong nhiều trường hợp nếu chọn các toạ độ thích hợp, $\underline{\underline{M}}$ là ma trận đường chéo.

$\underline{\underline{K}}$: Là ma trận giảm chấn. Nó là ma trận vuông cấp n mà các phần tử khác không của nó chứa các hệ số giảm chấn K_i của các mối liên kết trong hệ.

$\underline{\underline{C}}$: Là ma trận độ cứng. Nó là ma trận vuông cấp n mà các phần tử khác không có chứa độ cứng đường hoặc độ cứng góc của các mối liên kết đàn hồi trong hệ.

$\underline{q}$: Là vec tơ chuyển vị, các phần tử của nó là các chuyển vị đường hoặc chuyển vị góc của các vật thể trong hệ.

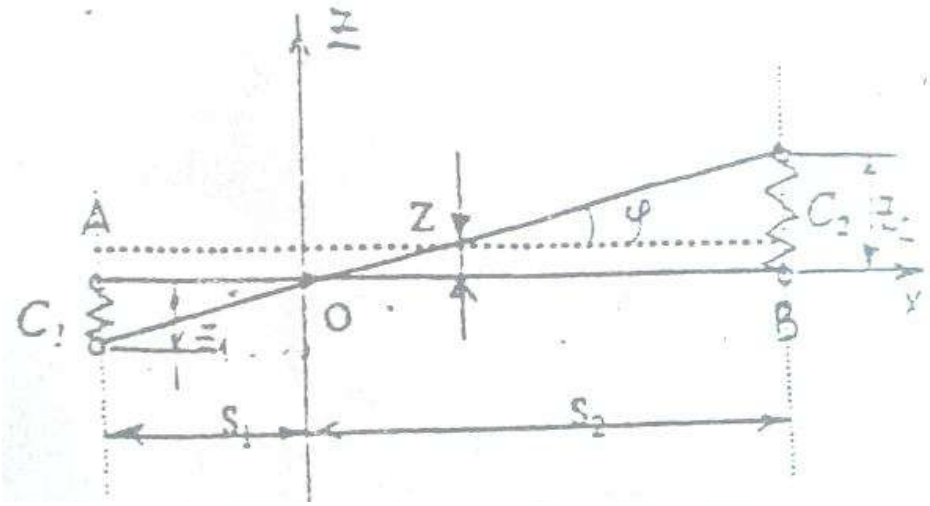
$\underline{\underline{\dot{q}}}$: Là vec tơ vận tốc dao động, các phần tử của nó là vận tốc dao động của các vật thể trong hệ.

$\underline{\ddot{q}}$: Là vec tơ gia tốc dao động của các vật thể trong hệ.

$\underline{F}$: Là vec tơ lực kích thích, các phần tử của nó là các lực hoặc mô men bên ngoài kích thích vào các vật thể làm cho hệ dao động.

Ở đây ta chỉ nghiên cứu các hàm kích thích là điều hòa.

Ví dụ 1: Viết phương trình dao động thẳng đứng của toa xe (hình 3-1) mà mô hình của nó tạo nên bởi 2 vật thể nối với nhau bằng các mối liên kết đàn hồi gồm các lò xo và giảm chấn như hình 3.2.



Đây cũng là một mô hình có tính điển hình của hệ dao động 2 bậc tự do.

a- Phương pháp dựa vào phương trình cân bằng lực.

- Chọn vị trí cân bằng Z = 0 là vị trí trọng tâm của m_1 ; m_2 khi các lò xo chịu độ nhún tĩnh.

- Khi các vật m_1 ; m_2 dao động, trọng tâm của chúng có chuyển vị Z_1 ; Z_2 thì lò xo C_2 có độ nhún Z_2 , lò xo C_1 có độ nhún $(Z_1 - Z_2)$.

- Đối với vật thể thứ nhất ta có phương trình cân bằng lực:

$$m_1 \ddot{Z}_1 + k_1(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2) + c_1(Z_1 - Z_2) = 0 \qquad (a)$$

- Đối với vật thể thứ 2 (3-2)

$$m_2 \ddot{Z}_2 - k_1(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2) - c_1(Z_1 - Z_2) + k_2 \dot{Z}_2 + c_2 Z_2 = F_0 e^{j\Omega t}$$

(b)

Sắp xếp lại các phương trình ta được:

$$m_1 \ddot{Z}_1 + k_1 \dot{Z}_1 - k_1 \dot{Z}_2) + c_1 Z_1 - c_1 Z_2 = 0 \qquad (a)$$

$$m_2 \ddot{Z}_2 - k_1 \dot{Z}_1 + (k_1 + k_2) \dot{Z}_2 - c_1 Z_2 - (c_1 + c_2) Z_2 = F_0 e^{j\Omega t} \quad (b)$$

Hay dưới dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{Z}_1 \\ \ddot{Z}_2 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1+c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 e^{j\Omega t} \end{bmatrix} \quad (3\text{-}3)$$

Hay ngắn gọn hơn dưới dạng (3-1):

$$\underset{=}{M}\,\underset{=}{\ddot{Z}} + \underset{=}{K}\,\underset{=}{\dot{Z}} + \underset{=}{C}\,\underset{=}{Z} = \underset{=}{F}$$

Trong đó:

$$\underset{=}{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$ (a) Ma trận khối lượng.

$$\underset{=}{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix}$$ (b) Ma trận giảm chấn.

$$\underset{=}{C} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1+c_2 \end{bmatrix}$$ (c) Ma trận độ cứng. (3-4).

$$\underset{=}{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$ (d) Vectơ chuyển vị.

$$\dot{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \end{bmatrix}$$ (e) Vectơ vận tốc dao động.

$$\ddot{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} \ddot{Z}_1 \\ \ddot{Z}_2 \end{bmatrix}$$ (f) Vectơ gia tốc dao động.

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_0 e^{j\Omega t} \end{bmatrix}$$ (g) Vectơ lực kích thích.

b- Phương pháp dựa vào phương trình Lagrange loại II

Phương trình Lagrange loại II đối với mỗi vật thể có dạng

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_1} + Q$$

Tại thời điểm t khi các vật thể có chuyển vị là Z_1 và Z_2 ta tính được:

Biểu thức động năng của hệ là: $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{Z}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{Z}_2^2$

Biểu thức thế năng của hệ là: $\Pi = \frac{1}{2} C_1 (Z_1 - Z_2)^2 + \frac{1}{2} C_2 . Z_2^2$

Biểu thức hàm hao tán có dạng: $\Phi = \frac{1}{2} K_1 (\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2)^2 + \frac{1}{2} K_2 . \dot{Z}_2^2$

Ta tính được các đạo hàm riêng:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{Z}_1} = m_1 . \dot{Z}_1 \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{Z}_2} = m_2 . \dot{Z}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial Z_1} = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial Z_2} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Z_1} = C_1(Z_1 - Z_2) \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial Z_2} = C_2.Z_2 - C_1(Z_1 - Z_2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{Z}_2} = K_2.Z_2 - K_1(Z_1 - Z_2)$$

Thế vào phương trình Lagrange loại II với các biến q_i là Z_1 và Z_2 ta được:

$$m_1 \frac{d}{dt}(\dot{Z}_1) - 0 = -C_1(Z_1 - Z_2) - K_1(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2)$$

$$m_2 \frac{d}{dt}(\dot{Z}_2) - 0 = -C_1(Z_1 - Z_2) + K_1(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2) + C_2 Z_2 + K_2 \dot{Z}_2$$

Hay

$$m_1 \ddot{Z} + K_1(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2) + C_1(Z_1 - Z_2) = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$m_2 \ddot{Z}_2 - K_1(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2) + K_2 \dot{Z}_2 - C_1(Z_1 - Z_2) + C_2 Z_2 = F_0.e^{j\Omega t} \quad \text{(b)}$$

Giống như hệ phương trình (3-2). Biến đổi thêm ta sẽ đưa về dạng (3-1).

Nói chung phương trình dao động của hệ thường là một hệ phương trình vi phân cấp 2 không thuần nhất có hệ số hằng số.

Nghiệm của hệ này, theo toán học bao gồm 2 phần:

1- Nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân thuần nhất. Hệ phương trình này có vế phải bằng 0, có nghĩa là dao động không có sự tham gia của lực kích thích, nghiệm của nó biểu diễn dao động tự do.

2- Một nghiệm riêng của hệ phương trình không thuần nhất. Hệ phương trình này có vế phải khác 0, nghiệm của nó biểu diễn dao động cưỡng bức.

Về mặt hình thức khi viết dưới dạng ma trận phương trình dao động của hệ nhiều bậc tự do chỉ còn là một phương trình có dạng giống như phương trình dao động của hệ một bậc tự do mà chúng ta đã gặp trong chương trước.

Điều này chẳng những đơn giản được cách viết mà còn đưa cách giải hệ phương trình dao động nhiều bậc tự do về cách giải tương tự như đối với một phương trình dao động của hệ một bậc tự do. Cách giải này sẽ có ưu điểm nổi bật khi giải các bài toán dao động của hệ có số bậc tự do lớn trên máy tính. Sau đây ta sẽ đi sâu nghiên cứu từng loại dao động đó.

II. DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA HỆ NHIỀU BẬC TỰ DO

1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG TỰ DO VÀ CÁCH GIẢI

Dao động tự do là dao động của hệ khi không có sự tham gia của các lực kích thích, phương trình dao động tự do là hệ phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng số mà dạng ma trận của nó là.

$$\underset{=}{M}\,\ddot{\underset{=}{Z}} + \underset{=}{K}\,\dot{\underset{=}{Z}} + \underset{=}{C}\,\underset{=}{Z} = \underset{=}{0} \qquad (3\text{-}5)$$

Ta tìm nghiệm của hệ dưới dạng:

$$\underset{-}{Z} = \underset{-}{Z_0}\, e^{\lambda t} \qquad (3\text{-}6)$$

Khi đó tính được giá trị các đạo hàm:

$$\dot{\underset{-}{Z}} = \lambda . \underset{-}{Z} \qquad \text{(a)} \qquad (3\text{-}7)$$

$$\ddot{\underset{-}{Z}} = \lambda^2 . \underset{-}{Z} \qquad \text{(b)}$$

Thay vào phương trình dao động (3-5) ta được:

$$(\lambda^2 \underset{=}{M} + \lambda \underset{=}{K} + \underset{=}{C}).\underset{-}{Z_0}.e^{\lambda t} = \underset{-}{0}$$

Bởi vì $e^{\lambda t}$ không triệt tiêu nên ta chỉ cần tìm các giá trị λ thoả mãn:

$$(\lambda^2 \underline{\underline{M}} + \lambda \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{C}}).\underline{Z}_0 = \underline{0} \qquad (3\text{-}8)$$

Hệ phương trình đại số thuần nhất này sẽ không có nghiệm tầm thường ($\underline{Z} \equiv \underline{0}$) Khi định thức của ma trận hệ số bằng 0, nghĩa là:

$$\text{Det}(\lambda^2 \underline{\underline{M}} + \lambda \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{C}}) = \underline{0} \qquad (3\text{-}9)$$

Phương trình này gọi là phương trình đặc trưng của hệ, nghiệm của nó sẽ cho ta giá trị λ_i gọi là các giá trị riêng:

$$\lambda_1 = \alpha_1 \pm \beta_1 \qquad (3\text{-}10)$$

Thay mỗi giá trị λ_I vào hệ (3-8), giải ra ta tìm được một vec tơ $\underline{Z}_0$ gọi là vec tơ riêng ứng với giá trị riêng λ_I đó. Vec tơ $\underline{Z}_{0i}$ chứa các phần tử là biên độ phức của các dao động thành phần có tần số vòng là β_i.

Theo (3-6) nghiệm của hệ (3-5) biểu diễn dao động tự do là:

$$\underline{Z} = \sum e^{\lambda t}.\underline{Z}_{0i} \qquad (3\text{-}11)$$

Như vậy dao động tự do của mỗi vật thể của hệ sẽ là tổng của những dao động họ hình sin tắt dần với những tần số β_I khác nhau:

2. VÍ DỤ

Ví dụ 1:

Viết phương trình dao động tự do của thân ôtô hình (3-3). Biết:

- Khối lượng thân ôtô: m
- Mô men quán tính khối lượng: J
- Lò xo trục sau có độ cứng C_1
- Lò xo trục trước có độ cứng: C_2
- Trục sau cách trọng tâm: S_1
- Trục trước cách trọng tâm: S_2

Giải:

Nếu tại thời điểm t lò xo sau có độ nhún Z_1 còn lò xo trước có độ nhún Z_2 hình 3-3 thì ta viết được 2 phương trình cân bằng lực và mô men:

$$\sum F_z = 0$$

$$m\ \ddot{Z} + C_1 Z_1 + C_2 Z_2 = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\sum M_z = 0$$

$$J.\ddot{\varphi}. - C_1 Z_1 s_1 + C_2 Z_2 s_2 = 0 \qquad \text{(b)}$$

Thay Z_1=Z-s_1.φ

Z_2= Z+s_2.φ

Phương trình trở thành:

$$m\ \ddot{Z} + C_1(\mathrm{Z} - \mathrm{s}_1\varphi) + C_2(\mathrm{Z} + \mathrm{s}_2\varphi) = 0$$

$$J\ \ddot{\varphi} - C_1\mathrm{s}_1(\mathrm{Z} - \mathrm{s}_1\varphi) + C_2\mathrm{s}_2(\mathrm{Z} + \mathrm{s}_2\varphi) = 0$$

Hay

$$m\ \ddot{Z} + (\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2)\mathrm{Z} - (C_2\mathrm{s}_2 - C_1 s_1)\varphi = 0$$

$$J\ddot{\varphi} + (\mathrm{C}_2 s_2 + \mathrm{C}_1\mathrm{s}_1)\mathrm{Z} - (C_2\mathrm{s}_2^2 - C_1 s_1^2)\varphi = 0$$

Dưới dạng ma trận :

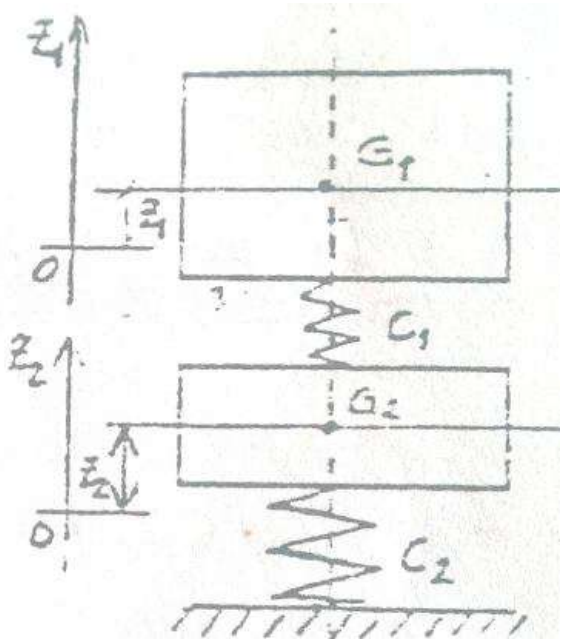
$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{Z} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (C_1 + C_2) & (C_1 s_1 - C_2 s_2) \\ (C_1 s_1 - C_2 s_2) & (C_1 s_1^2 - C_2 s_2^2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nếu C_1s_1= C_2s_2 thì 2 phương trình sẽ độc lập với nhau, và do đó 2 dạng dao động cũng độc lập với nhau. Điều kiện này có nghĩa là trọng tâm của xe trùng với tâm dao động.

<u>Ví dụ 2:</u>

Xác định tần số và dạng dao động tự do của các vật thể m_1,m_2 của toa xe trong mô hình 3-3. bởi vì các giảm chấn không ảnh hưởng nhiều đến tần số nên ta

có thể bỏ qua. Mô hình dao động này sẽ đơn gian hơn như (hình 3-4).



Phương trình dao động theo (3-3) với $\underline{\underline{K}} = \underline{0}$ là:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{Z}_1 \\ \ddot{Z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & -C_1 \\ -C_1 & (C_1 + C_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}12)$$

Tìm nghiệm dưới dạng (3-6):

$$\underline{Z} = \underline{Z}_o . e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} Z_{o1} \\ Z_{o2} \end{bmatrix} e^{j\beta t}$$

Thì $\ddot{\underline{Z}} = -j\underline{Z}$

Thay vào (3-12) ta được :

$$(\underline{\underline{C}} - \beta^2 \underline{\underline{M}})\underline{Z}_o e^{j\beta t} = \left(\begin{bmatrix} C_1 & -C_1 \\ -C_1 & (C_1 + C_2) \end{bmatrix} - \beta^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \right) \underline{Z}_o e^{j\beta t} = \underline{0}$$

Bởi vì $e^{j\beta t}$ không triệt tiêu nên :

$$\left(\begin{bmatrix} C_1 & -C_1 \\ -C_1 & (C_1+C_2) \end{bmatrix} - \beta^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\right)\underline{Z}_o = \underline{0} \qquad (3\text{-}13)$$

Hệ phương trình đại số này sẽ lhông có nghiệm tầm thường khi :

$$\det\left(\begin{bmatrix} C_1 & -C_1 \\ -C_1 & (C_1+C_2) \end{bmatrix} - \beta^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\right) = \underline{0}$$

Đây chính là phương trình tần số.

Thực hiện phép tính trong ngoặc ta được:

$$\det\begin{bmatrix} C_1 - \beta^2 m_1 & -C_1 \\ -C_1 & (C_1+C_2) - \beta^2 m_2 \end{bmatrix} = 0$$

Hay $(c_1-\beta^2 m_1)(c_1+c_2-\beta^2 m_2)-c_1^{\,2}=0$

$m_1 m_2 \beta^4 - m_1(c_1+c_2)\beta^2 - c_2 m_2 \beta^2 = 0$

Từ đó : $\beta^4 - (\frac{c_1}{m_1}+\frac{c_2}{m_2}+\frac{c_1}{m_2})\beta^2 + \frac{c_1.c_2}{m_1.m_2} = 0$

Đây là một phương trình bậc 4 đối với β. Giải phương trình này ta được 4 trị số của β, trong đó hai trị số âm không có ý nghĩa.

$$\beta_{12}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{m_1}+\frac{c_2}{m_2}+\frac{c_1}{m_2}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c_1}{m_1}+\frac{c_2}{m_2}+\frac{c_1}{m_2}\right)^2} \qquad (3\text{-}14)$$

Với các ký hiệu:

$$\beta_{11} = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}} \qquad \text{(a)} \qquad (3\text{-}15)$$

$$\beta_{22} = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}} \qquad \text{(b)}$$

$$\beta_{21} = \sqrt{\frac{c_1}{m_2}} \qquad \text{(c)}$$

Ta tìm được 2 trị số β>0 thỏa mãn điều kiện của bài toán:

$$\beta_{1.2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\beta_{11}^2+\beta_{21}^2+\beta_{22}^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\beta_{11}^2+\beta_{21}^2+\beta_{22}^2)^2 - \beta_{11}^2.\beta_{22}^2}} \qquad (3\text{-}16)$$

Trong trường hợp này dao động tự do của hệ sẽ có 2 tần số khác nhau.

Nếu $\beta_1 < \beta_2$ thì β_1 gọi là tần số thấp, còn β_2 gọi là tần số cao.

Nghiệm của hệ (3-12) sẽ biểu diễn dạng dao động tự do của các vật thể.

Để tìm nghiệm này ta cần giải hệ phương trình đại số (3-13), để tìm các vectơ riêng biểu diễn biên độ của các dao động thành phần.

- Thay β_1 vào hệ (3-13) rồi giải ra ta tìm được vectơ riêng:

$$\underline{Z_{01}} = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$$

- Thay β_2 vào hệ (3-13) rồi giải ra ta tìm được vectơ riêng:

$$\underline{Z_{02}} = \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

Như vậy mỗi vật thể sẽ đồng thời tham gia dao động với 2 tần số khác nhau

$$\underline{Z} = e^{j\beta 1t}\underline{Z}_{01} + e^{j\beta 2t}\underline{Z}_{02}$$

Hay là: $Z_1 = A_1 e^{j\beta 1t} + A_2 e^{j\beta 2t}$ (a) (3-17)

$$Z_2 = B_1 e^{j\beta 1t} + B_2 e^{j\beta 2t} \quad \text{(b)}$$

Từ (3-13) ta thấy các dao động có cùng tần số thì tỉ số các biên độ sẽ là hằng số:

- Đối với các dao động có tần số thấp:

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{C_1 - \beta_1^2 . m_1}{c_1} = 1 - \frac{\beta_1^2}{\beta_{11}^2} \quad \text{(a).}$$

- Đối với dao động có tần số cao:

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{B_2}{A_2} = \frac{c_1 - \beta_2^2 m_1}{c_1} = 1 - \frac{\beta_2^2}{\beta_{11}^2} \quad \text{(b)} \quad (3\text{-}18)$$

III. DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC CỦA HỆ NHIỀU BẬC TỰ DO

1. MÔ HÌNH VÀ PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG

Dao động cưỡng bức là dao động của hệ dưới tác dụng của các lực kích thích vào 1 hay nhiều vật thể trong hệ. Mô hình của nó như đã nói ở trên là một

hay nhiều vật thể liên hệ với nhau cùng dao động dưới tác dụng của các lực kích thích. Phương trình dao động thường là 1 hệ phương trình vi phân cấp 2 không thuần nhất, khi viết dưới dạng ma trận theo (3-1) là:

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{q}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{\dot{q}} + \underline{\underline{C}}\,\underline{q} = \underline{F}$$

Trong đó các ý nghĩa của các đại lượng trong vế trái chúng ta đã hiểu biết qua công thức (3-4) khi nghiên cứu dao động tự do.

Vế phải là vectơ lực kích thích, nó phải có ít nhất một phần tử khác không, đó là các lực hay mômen kích thích dao động.

Lực kích thích vào các vật thể có thể theo nhiều qui luật khác nhau, do khuôn khổ của giáo trình này chúng ta chỉ nghiên cứu trường hợp kích thích điều hòa.

Khi F có dạng:

$$\underline{F} = \underline{F}_0 . e^{j(\Omega t + \theta)} = \underline{F}_0 e^{j\theta} e^{j\Omega t} = \underline{F}_0^* e^{j\Omega t}$$

Trong đó:

$\underline{F_0^*} = \underline{F}_0 . e^{j\Omega t}$ là vectơ biên độ phức của các lực kích thích:

$\underline{F}$: Vectơ biên độ của các lực kích thích.

Ω : tần số vòng của lực hay mômenkích thích.

2. DẠNG VÀ CÁC THÔNG SỐ CỦA DAO ĐỘNG

Ta tìm nghiệm riêng của (3-1) biểu diễn dao động cưỡng bức của hệ dưới dạng:

$$\underline{q} = \underline{q}_0 . e^{j(\Omega t + \varphi)} = \underline{q}_0 e^{j\varphi} e^{j\Omega t} = \underline{q}_0^* e^{j\Omega t} \qquad (3\text{-}12)$$

Trong đó cũng như ở trên:

$\underline{q}_0^* = \underline{q}_0 . e^{j\Omega t}$ là vectơ biên độ phức của dao động;

$\underline{q}_0$ - vectơ biên độ của dao động.

Khi đó các đạo hàm: $\underline{\dot{q}} = j\Omega \underline{q}$ (a) (3-21)

Và $\ddot{\underline{q}} = -\Omega^2 \underline{q}$ (b)

Thay vào phương trình dao động:

$$(\underline{\underline{C}} - \Omega^2 \underline{\underline{M}} + j\Omega \underline{\underline{K}})\, \dot{\underline{q}}_0\, e^{j\Omega t} = \dot{\underline{F}}_0\, e^{j\Omega t}$$

Khử $e^{j\Omega t}$ ta được hệ phương trình đại số dạng phức:

$$(\underline{\underline{C}} - \Omega^2 \underline{\underline{M}} + j\Omega \underline{\underline{K}})\, \dot{\underline{q}}_0\, e^{j\Omega t} = \dot{\underline{F}}_0$$

Từ đó: $\dot{q}_0 = (\underline{\underline{C}} - \Omega^2 \underline{\underline{M}} + j\Omega \underline{\underline{K}})^{-1} = \dot{\underline{F}}_0$ (3-22)

Ma trận: $\underline{\underline{H}}\ (j\Omega) = (\underline{\underline{C}} - \Omega^2 \underline{\underline{M}} + \Omega \underline{\underline{K}})^{-1}$ (3-23)

Là ma trận có các phần tử là số phức được gọi là *hàm truyền của hệ*.

Viết lại (3-22) có chú ý đến (3-23) ta được công thức tính biên độ phức của hệ dao động cưỡng bức:

$$\dot{\underline{q}} = \underline{\underline{H}}(J\Omega)\, \dot{\underline{F}}_0 \qquad (3\text{-}24)$$

Như vậy theo (3-20) dao động cưỡng bức của hệ là những dao động điều hòa có tần số bằng tần số Ωcủa lực kích thích, còn biên độ phức của chúng (bao gồm biên độ và góc lệch pha) thì xác định bằng công thức (3-24) thông qua tích của Hàm truyền và biên độ phức của lực kích thích.

1. Ví dụ: Giải hệ phương trình (3-3):

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{Z}_1 \\ \ddot{Z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K & (K_1+K_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_2 & (c_1+c_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_O\, e^{j\Omega t} \end{bmatrix}$$

để tìm dao động của các vật thể m_1, m_2.trong mô hình toa xe hình 3-2.

Hệ phương trình có thể viết ngắn gọn dưới dạng (3-1).

$$\underline{\underline{M}}\, \ddot{\underline{Z}} - \underline{\underline{K}}\, \dot{\underline{Z}} - \underline{\underline{C}}\, \underline{Z} = \underline{F}$$

Ta tìm nghiệm của hệ dưới dạng:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_0 e^{j\Omega t} \qquad (3\text{-}25)$$

Trong đó:

$\underline{Z}_0$ là vectơ biên độ phức của nghiệm: $Z_0=\begin{bmatrix} Z_0^1 e^{j\varphi t} \\ \\ Z_0^2 e^{j\varphi t} \end{bmatrix}$ (3-26)

Khi đó: $\dot{\underline{Z}} = \Omega \underline{Z}$ và $\ddot{\underline{Z}} = -\Omega^2 \underline{Z}$

Thay vào phương trình dao động (3-1) ta được:

$$[(C - \Omega^2 \underline{\underline{M}}) + j\Omega \underline{\underline{K}})\dot{\underline{Z}}_0 e^{j\Omega t} = \dot{\underline{F}}_0 e^{j\Omega t}$$

Khử $e^{j\Omega t}$ ở cả 2 vế, ta đi đến một hệ phương trình đại số dạng phức:

$$(C - \Omega^2 \underline{\underline{M}}) + j\Omega \underline{\underline{K}})\dot{z}_0 = \dot{\underline{F}}_0 \qquad (3\text{-}27)$$

Ta cần giải hệ phương trình này để tìm vectơ biên độ phức $\underline{z}_0^1$

Đây là một hệ phương trình đại số tuyến tính dạng phức, không thuần nhất, có vế phải khác không. Có nhiều phương pháp để giải hệ này.

Ký hiệu ma trận hệ số ((phần trong ngoặc vuông) là $\underline{\underline{A}}$. Sauk hi thực hiện phép tính ta thấy nó là một ma trận vuông cấp 2 với 4 phần tử phức:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} (C_1 - \Omega^2 m_1) + J\Omega K_1 & -(C_1 + J\Omega K_1) \\ -(C_1 + J\Omega K_1) & (C_1 + C_2 - \Omega^2 m_2) + j\Omega(k_1 + k_2) \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}28)$$

Thay các phần tử bằng ký hiệu có thể viết gọn hơn:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}29)$$

* Đối với những hệ có nhiều bậc tự do ta cần tính hàm số truyền $\underline{\underline{H}}(j\Omega)$ bằng cách tính ma trận nghịch đảo của $\underline{\underline{A}}$:

$$\underline{\underline{H}}(j\Omega) = \underline{\underline{A}}^{-1}$$

Khi đã có hàm số truyền ta tính được:

$\dot{\underline{Z}}_0 = \underline{\underline{H}}\,(j\Omega)\,\dot{\underline{F}}_0$

Tuy vậy ma trận A là một ma trận phức nên công việc này tương đối khó khăn, đòi hỏi phải có những phần mềm chuyên dụng mới nghịch đảo được.

- Trong trường hợp đang xét, số bậc tự do nhỏ, ta có thể tính nghiệm của hệ phương trình đại số $\underline{\underline{A}}\,\dot{\underline{Z}}_0 = \dot{\underline{F}}_0$ theo công thức Cramer.

$$\underline{Z_{01}} = \frac{\det\begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ F_0 & A_{22} \end{bmatrix}}{\det A} = F_0 \frac{-A_{12}}{\det A} \qquad \text{(a)} \qquad (3\text{-}30)$$

$$\underline{Z_{02}} = \frac{\det\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & F_0 \end{bmatrix}}{\det A} = F_0 \frac{-A_{11}}{\det A} \qquad \text{(b)}$$

Thay $-A_{12} = C_1 + j\Omega K_1 = \sqrt{C_1 - (\Omega K_1)^2}\, e^{j\varphi 1}$

Vào $\varphi_1 = arctg \dfrac{\Omega K_1}{C_1}$

$$A_{11} = (C_1 - \Omega^2 m_1) + j\Omega K_1 = \sqrt{(C_1 - \Omega^2 m_1)^2 + (\Omega K_1)^2}\, e^{j\varphi 2}$$

Với $\varphi_2 = arctg \dfrac{\Omega K_1}{C_1 - \Omega^2 m_1}$

- $\det A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = L + jN = \sqrt{L^2 + N^2}\, e^{j\varphi 3}$ (3-31)

Với $\varphi_3 = arctg \dfrac{N}{L}$

Trong đó :

$L = (C_1 - \Omega^2 m)(C_2 - \Omega^2 m_2) - C_1\Omega^2 m_1 - K_1K_2\Omega^2$ (a) (3-32)

$N = \Omega(K_2(C_1 - \Omega^2 m_1) + K_1(C_2 - \Omega^2 m_1 - \Omega^2 m_2))$ (b)

Thay giá trị của $A_{11}, A_{12}, \det A$ vào (3-30) ta tính được các phần tử của vectơ biên độ phức.

$$Z_{01} = F_0 \sqrt{\frac{C_1^2 + (K_1\Omega^2)}{L^2 + N^2}} e^{j(\varphi - \varphi_3)} \quad \text{(a)} \quad \text{(3-33)}$$

$$Z_{02} = F_0 \sqrt{\frac{(C_1 - m_1\Omega^2)^2 + (K_1\Omega^2)}{L^2 + N^2}} e^{j(\varphi_2 - \varphi_3)} \quad \text{(b)}$$

Nghiệm của phương trình dao động sẽ là:

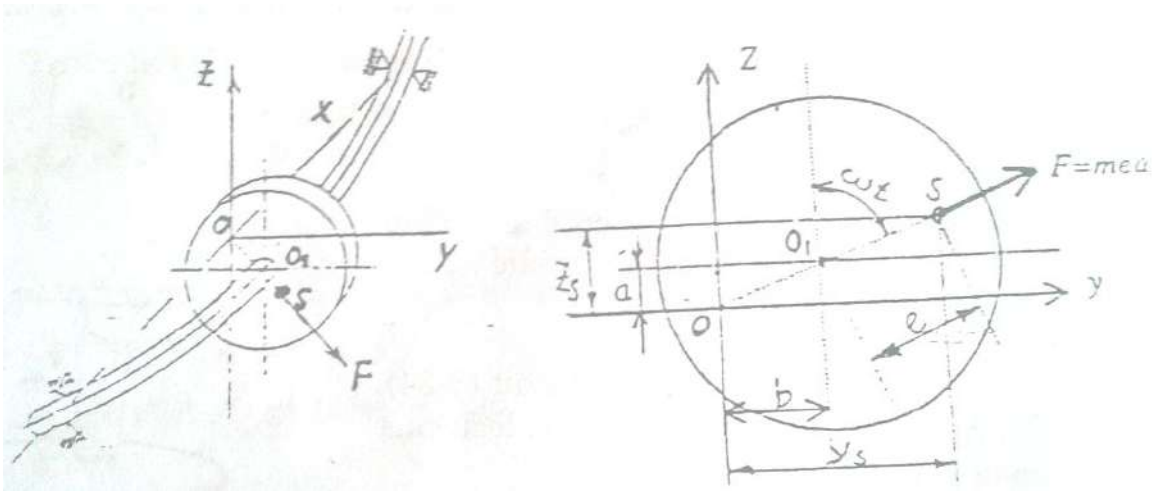
$$Z_1 = F_0 \sqrt{\frac{C_1^2 + (K_1\Omega^2)}{L^2 + N^2}} e^{j(\Omega t + \varphi_2 - \varphi_3)} \quad \text{(a)} \quad \text{(3-34)}$$

$$Z_2 = F_0 \sqrt{\frac{(C - m_1\Omega^2)^2 + (K_1\Omega)^2}{L^2 + N^2}} e^{j(\Omega_1 + \varphi_2 - \varphi_3)} \quad \text{(b)}$$

3. CÁC BÀI TOÁN ỨNG DỤNG

BÀI TOÁN 1: Trục quay là bộ máy thường gặp trong kỹ thuật như trục có gắn bánh răng, pu-li hay bánh đà…, mô hình của nó là một đĩa tròn có trọng tâm S không trùng với tâm hình học O được gắn chặt trên một trục xuyên qua tâm hình học và vuông góc với mặt phẳng của đĩa, vị trí của đĩa ở giữa trục.

Trục quay thường được dẫn động từ những nguồn động lực, do đó nó có năng lượng dự trữ. Trong những điều kiện nhất định nguồn năng lượng đó có thể biến thành dao động uốn làm cho chuyển động của trục trở nên mất ổn định nhất là khi trọng tâm của đĩa không trùng với trục quay. Giả sử đĩa có khối lượng m đặt tại D lệch tâm với trục hình học một khoảng e. Khi quay với vận tốc ω nó sinh ra lực quán tính $F=-m\omega^2e$ làm cho trục bị uốn.



Nếu hình chiếu của độ uốn trên các trục Z và Y là a và b (hình 3-6) thì tọa độ trọng tâm của đĩa trên hệ trục là:

$Z_s = a + e\cos\omega$

$Y_s = b + e\sin\omega$

Phương trình vi phân chuyển động của đĩa theo các trục đó là:

$m\ddot{z}_s + Ca = 0$

$m\ddot{Y}_s + Cb = 0$

Ca,Cb : là hình chiếu của các lực đàn hồi trên các trục Z và Y.

C: là độ cứng chống uốn của trục.

Thay giá trị đạo hàm bậc 2 của Z_s và Y_s vào, ta có:

$m\ddot{a} + Ca = me\omega^2\cos\omega t$

$m\ddot{b} + Cb = me\omega^2\sin\omega t$

Nghiệm của các phương trình này là:

$$a = \frac{e}{\frac{\beta^2}{\omega^2} - 1}\cos\omega t \quad \text{vaø} \quad b = \frac{e}{\frac{\beta^2}{\omega^2} - 1}\sin\omega t$$

Khi $\omega = \beta$ sẽ xảy ra cộng hưởng làm cho biên độ tăng lên. Vận tốc quay đó gọi là vận tốc quay tới hạn. Từ điều kiện $\omega_{th} = \beta$ ta có:

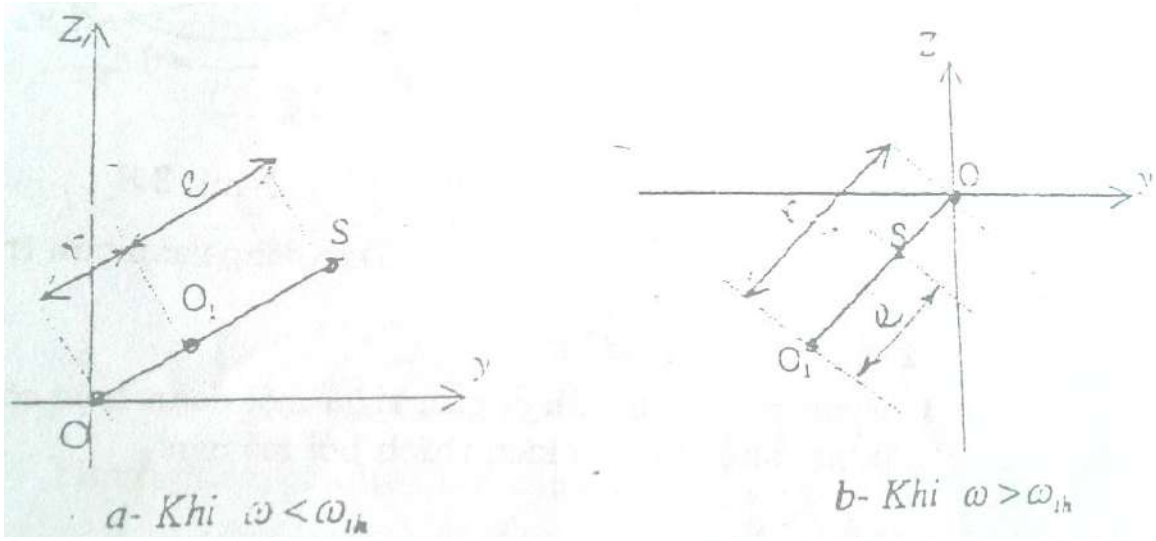
$$\omega_{th} = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Vận tốc tới hạn ω_{th} chỉ phụ thuộc vào các tham số của hệ, ω_{th} càng lớn khi trục càng cứng và đĩa càng nhẹ.

Với một vận tốc quay nhất định, tâm O_1 của đĩa sẽ chuyển động trên một vòng tròn bán kinh:

$$r = \frac{e}{\frac{\beta^2}{\omega^2} - 1}$$

Khi đó tâm quay O,tâm O_1 của đĩa và trọng tâm S sẽ nằm trên một đường thẳng.



a- Khi $\omega < \omega_{th}$ b-Khi $\omega > \omega_{th}$

Hình 3.6 - Vị trí tương đối của các điểm O, O_1, S

Vị trí tương đối giữa các điểm O , O_1 và S (hình 3-6) sẽ khác nhau, tùy thuộc vào tỷ số β/ω.

-Khi $\omega < \beta$, trọng tâm S nằm ngoài đoạn OO_1 (hình a),

-Khi $\omega > \beta$, trọng tâm S nằm trong đoạn OO_1 (hình b).

Hình 3-7 biểu diễn quan hệ giữa r/e (gọi là độ uốn tương đối) với tỉ số các

tần số vòng ω/β, ta nhận thấy:

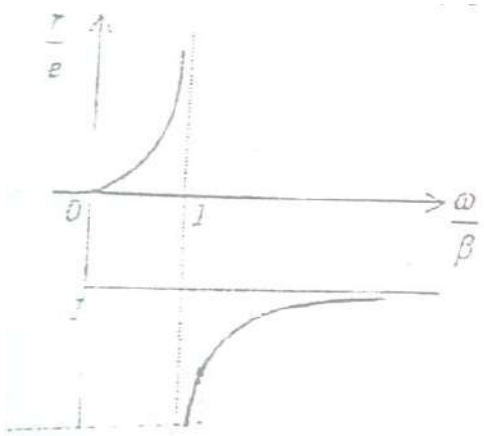
* Khi quay chậm (ω nhỏ) thì độ uốn bé, ω tăng lên thì độ uốn cũng tăng lên.

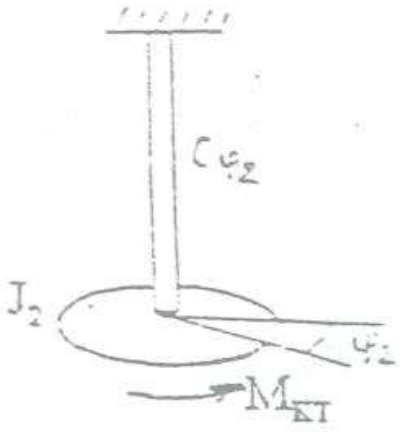
Khi trọng tâm S cách xa tâm quay hơn tâm hình học (nằm ngoài OO_1).

* Khi $\omega = \omega_{th} \rightarrow \frac{\omega}{\beta} = 1$ thì độ uốn $\frac{r}{e}$ -> ∞

* Sau miền tới hạn, khi $\omega > \omega_{th}$ độ uốn trở về hữu hạn, nhưng có hướng ngược lại với độ lệch tâm (r và e trái dấu), trọng tâm S nằm trong đoạn OO_1.

* Khi ω rất lớn, trục quay rất nhanh, trọng tâm S của đĩa có xu hướng trở về gần tâm quay O. Khi $\omega \rightarrow \infty$ thì r $\rightarrow$ -e, nghĩa là ở tốc độ quay rất lớn sẽ xãy ra hiện tượng tự định tâm của đĩa.





Hình 3.7 - Đồ thị độ uốn tương đối Hình 3.8 -Dao động xoắn của trục

<u>BÀI TOÁN 2</u>: Giảm chấn thủy lực:

Khi một đĩa tròn mômenquán tính J_2 gắn trên một đoạn trục có độ cứng chống xoắn $C_{\psi 2}$ (hình 3-S), khi chịu kích thích bởi moment:

$M_{kt} = Me^{j\Omega t}$

Sẽ có dao động cưỡng bức biểu diễn bởi phương trình :

$J_2\ddot{\varphi} + C_{\psi 2} = M_0 e^{j\Omega t}$

Dạng của dao động này theo (2-74) là:

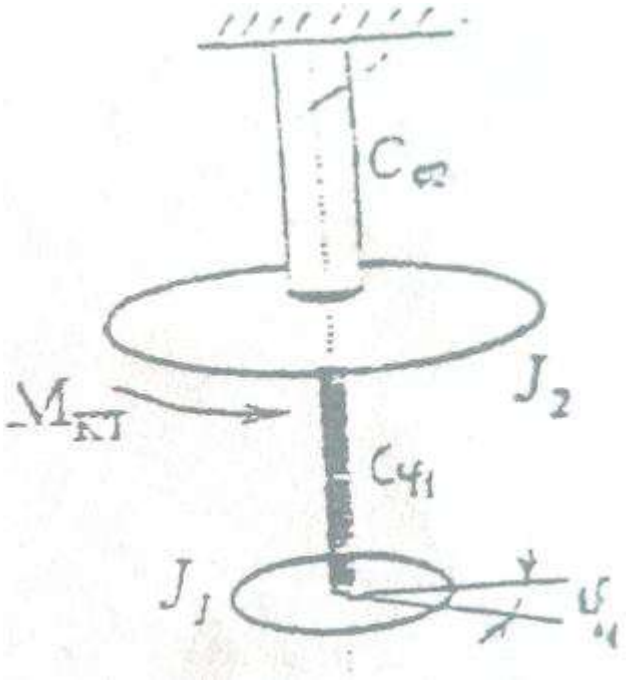
$$\varphi_2 = \varphi_{20}\, e^{j\Omega t - \theta}$$

Trong đó:

$$\varphi_{20} = \frac{M_0}{C_{02}} y_1 = \frac{M_0}{C_{02}} \cdot \frac{1}{1-\eta^2} = \frac{M_0}{C_{02}} \cdot \frac{\beta_{02}^2}{\beta_{02}^2 - \Omega^2}$$

$$\beta_{02} = \sqrt{\frac{C_{02}}{J_2}} \text{ và } \theta = arctgO = 0$$

Để dập tắt dao động này ta nối tiếp vào đĩa J_2 một đoạn trục có độ cứng $C_{\Psi 1}$ và một đĩa có mômen quán tính tính J_1 (hình 3-9).



Khi đó hệ sẽ trở thành 2 bậc tự do có phương trình dao động là:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + C_{\psi 1}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 - C_{01}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{02}.\varphi_2 = M_0 e^{J\Omega t} \qquad \text{(b)}$$

Hay dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & j_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{Z}1 \\ \ddot{Z}2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{01} & -C_{02} \\ -C_{02} & (C_{01}+C_{02}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_0 e^{J\Omega t} \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình này có dạng giống như (3-12) khi ma trận giảm chấn $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{0}}$.

Nghiệm của nó tương tự như (3-34), với $K_1=K_2=0$ dẫn đến các góc lêch pha bằng 0 và N=0, ta có:

$$\varphi_1 = Mo\frac{C_{01}}{L}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega t} \qquad \text{(a)}$$

$$\varphi_2 = Mo\frac{C_{01} - J_1\Omega^2}{L}e^{j\Omega t}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega t} \qquad \text{(b)}$$

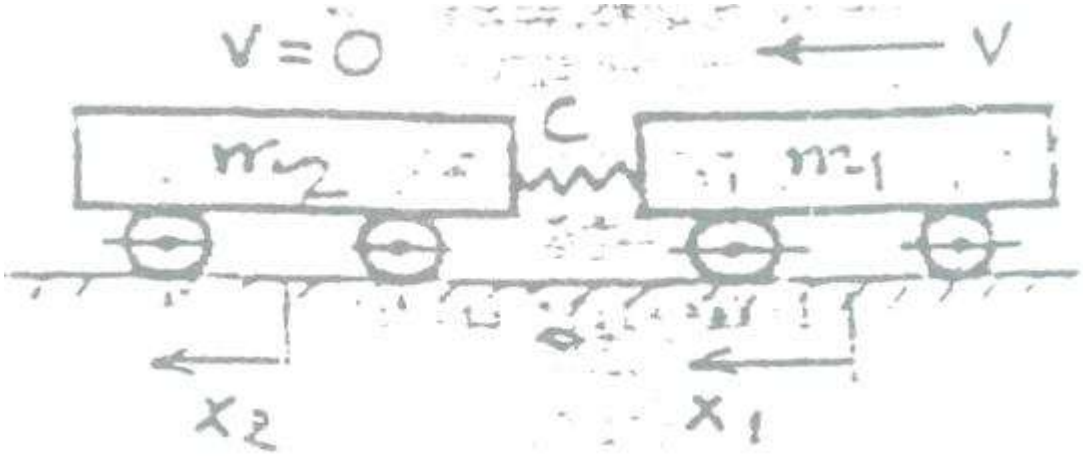
Theo (3-32):

$$L = (C_{01} - \Omega^2 J_2)(C_{02} - \Omega^2 J_2) - C_{01}\Omega^2 J_1$$

Nếu $L \neq 0$ chúng ta chọn $(C_{01} - \Omega^2 J_1) = 0$ thì $\varphi_2 = 0$ nghĩa là đĩa J_2 sẽ hoàn toàn không dao động. Đó là nguyên lý của giảm chấn động lực.

IV. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 3

1. Thành lập mô hình và viết PTDĐ của hệ 2 và nhiều bậc tự do.



Hình BT3.1 -Nối toa xe

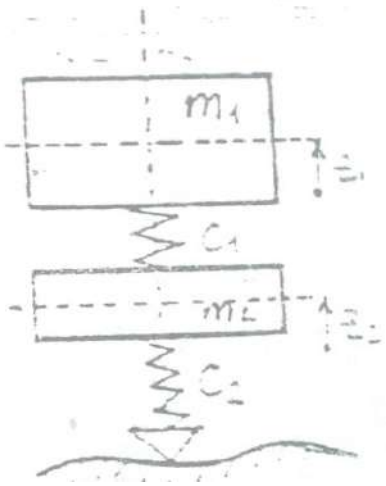
2. Đối với hệ dao động tự do cũng như dao động cưỡng bức nhiều bậc tự do cần nắm vững cách:

* Thành lập mô hình.

* Viết phương trình dao động.

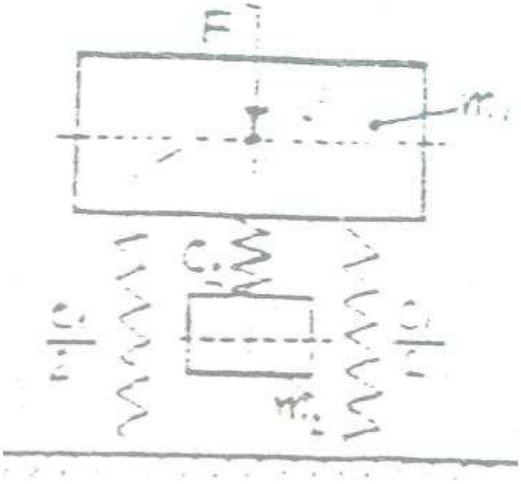
* Cách giải hệ phương trình dao động 2 bậc tự do bằng phương pháp giải tích.

* Cách giải hệ phương trình và xét điều kiện xảy ra mất ổn định bằng bài toán giá trị riêng trên máy tính.



Hình BT3.2- Mô hình ôtô

3. Khi dồn toa (hình BT3-1) một toa tàu chuyển động với vận tốc V đến mốc vào một toa khác đứng yên .Xác định quy luật chuyển động tương đối của các toa sau khi móc nối biết khối lượng của các toa bằng m_1,m_2 và độ cứng mốc nối là C bỏ qua ma sát của bánh xe và mặt đường.



Hình BT3.3 -Giảm chấn động lực

4. Mô hình ô tô 2 bậc tự do chạy trên mặt đường gồ ghề lượn sóng biểu diễn trên hình BT.3-2 .Biết khối lượng thùng xe m_1=800kg, khối lượng bánh xe m_2= 200kg, Tổng độ cứng hệ treo C=5.10^4N/m,Tổng độ cứng các lốp xe C=6.10^4N/m.

Hãy viết phương trình dao động của cơ hệ , tính các tần số dao động tự do và tính tốc độ tới hạn xảy ra cộng hưởng. Biết mặt đường hình sóng có L=1m và h=2m

5. Để dập tắt dao động của một khối lượng m_1 (hình BT3-3) đặt trên lò xo C_1 do lực kích thích F= $F_0 Sin\Omega t$ gây ra người ta treo vào nó một khối lượng m_2 qua lò xo C_2.

Tính toán các giá trị của m_2 và độ cứng lò xo C_2 đó để dao động của m1 là nhỏ nhất.

PHỤ LỤC

Bảng 1 - BẢNG THỨ NGUYÊN MỘT SỐ ĐẠI LƯỢNG

Thường dùng khi tính toán dao động

T	Đại lượng	Ký hiệu	Đơn vị	Ghi chú
	Chuyển vị : - Đường	Z, X, Y	m	
	- Mặt	φ, α, β	rad	
	Lực	F	N, kN	
	Mô men lực	M	Nm	
	Thời gian	t	s	
	Khối lượng	M, m	G, kg	$Kg=Ns^2/m$
			Tấn	Tấn = 1000kg
	Mômen quán tính khối lượng	J	Nms^2	
			$Tấn\ m^2$	$Tấn=kNms^2$
	Vận tốc : - Dài	V, $\dot{Z}$	m/s	
	- Góc	φ	Rad/s	Rad/s=1/s
	Gia tốc - Dài	$\ddot{Z}$	m/s^2	
	- Góc	$\ddot{\varphi}$	Rad/s^2	$Rad/s^2=1/s$
	Độ cứng - Đường	C	N/m	
	- Góc	Cφ	Nm/rad	
0	Hệ số cản - Đường	K	Ns/m	
	Dao động : - Góc	Kφ	Nms/rad	
1	Tần số	f	Hz	Hz = 1/s
	Tần số vòng	ω, Ω	Hz	
2	Chu kỳ	T	s	

Bảng 2 - NHỮNG BỘI SỐ VÀ ƯỚC SỐ CỦA ĐƠN VỊ ĐO

Bội số của đơn vị đo			**Ước số của đơn vị đo**		
Tên gọi	**Ký hiệu**	**Độ lớn so với đơn vị**	**Tên gọi**	**Ký hiệu**	**Độ lớn so với đơn vị**
deka	da-	10	deci-	d-	10^{1}
Hecto-	h-	10^{2}	Centi-	c-	10^{2}
Kilo-	k-	10^{3}	Mili-	m-	10^{3}
Mega-	M-	10^{6}	Mikro-	μ-	10^{-6}
Giga-	G-	10^{9}			
Tera-	T-	10^{12}			

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Nguyễn Văn Khang – Dao động kỹ thuật - Nhà xuất bản KHKT - 1998;

[2]. Nguyễn Văn Khang – Bài tập Dao động kỹ thuật - Nhà xuất bản KHKT - 1998;

[3]. Lê Huy Cận (dịch) – Lý thuyết dao động - Nhà xuất bản KHKT;

[4]. Nguyễn Đông Anh (dịch) – Dao động tuyến tính - Nhà xuất bản KHKT.